Suites arithmétiques et suites géométriques

Voir le corrigé
Albert dispose d' un capital initial $C_0 = 3000$ euros.
Pour le placement A, le taux annuel est de 6% à intérêts simples. C'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 6% du **capital initial** (les intérêts ne sont pas capitalisés chaque année, comme ce serait le cas pour des intérêts composés).
Pour le placement B, le taux annuel est de 4% à intérêts composés. C'est-à-dire que le capital d'une année est égal à celui de l'année précédente augmenté de 4%.
On note C_n le capital d'Albert au bout de n années avec le placement A et D_n le capital d'Albert au bout de n années avec le placement B, capital exprimé en euros.

1. Calculer le capital pour chacun des deux placements après une année puis après deux années.

2. Quelle est la nature de la suite (C_n) ?
Pour tout entier n, exprimer alors C_n en fonction de n.

3. Quelle est la nature de la suite (D_n) ?
Pour tout entier n, exprimer alors D_n en fonction de n.

4. Déterminer le nombre d'années nécessaires pour que le capital double avec le placement A.

5. Quel est le placement le plus avantageux au bout de dix années ?

6. En utilisant le tableur de la calculatrice, déterminer le nombre d'années nécessaires pour que le placement B soit plus avantageux que le placement A.

CORRECTION

Voir le texte

1. Calculer le capital pour chacun des deux placements après une année puis après deux années.

☛ **Solution**:

Avec le placement A, le capital augmente chaque année de $\dfrac{6}{100} \times 3000 = 180$ euros.
On a donc après une année $C_1 = 3000 + 180 = 3180$ euros
et après deux années $C_2 = 3180 + 180 = 3360$ euros.

Avec le placement B, le capital est multiplié chaque année par $1 + \dfrac{4}{100} = 1,04$.
On a donc après une année $D_1 = 3000 \times 1,04 = 3120$ euros
et après deux années $D_2 = 3120 \times 1,04 = 3244,8$ euros.

2. Quelle est la nature de la suite (C_n) ?

☛ **Solution**:

Chaque année, on ajoute 180 euros donc $C_{n+1} = C_n + 180$
donc (C_n) est une suite arithmétique de raison $r = 180$ et de premier terme $C_0 = 3000$.

Pour tout entier n, exprimer alors C_n en fonction de n.

☛ **Solution**:

On a donc $C_n = C_0 + nr$ soit ici $C_n = 3000 + 180n$

3. Quelle est la nature de la suite (D_n) ?

☛ **Solution**:

Chaque année on multiplie le capital par $1,04$ donc on a $D_{n+1} = D_n \times 1,04$
donc (D_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,04$ et de premier terme $D_0 = 3000$.

Pour tout entier n, exprimer alors D_n en fonction de n.

☛ **Solution**:

On a donc $D_n = D_0 \times q^n$ soit ici $D_n = 3000 \times 1,04^n$

4. Déterminer le nombre d'années nécessaires pour que le capital double avec le placement A.

☛ **Solution**:

Il faut résoudre $C_n \geq 6000$.
$C_n \geq 6000$
$\Longleftrightarrow 3000 + 180n \geq 6000$
$\Longleftrightarrow 180n \geq 3000$
$\Longleftrightarrow n \geq \dfrac{3000}{180}$
$\Longleftrightarrow n \geq \dfrac{50}{3}$
or $n \in \mathbb{N}$ et $\dfrac{50}{3} \simeq 16,7$ donc $n \geq 17$
donc le capital aura doublé après 17 années.

5. Quel est le placement le plus avantageux au bout de dix années ?

☛ **Solution**:

Il faut calculer C_{10} et D_{10}.

$C_{10} = 3000 + 10 \times 180 = 4800$ euros et $D_{10} = 3000 \times 1,04^{10} \simeq 4440,73$ euros (au centime près)

donc le placement A est plus avantageux après dix années.

6. En utilisant le tableur de la calculatrice, déterminer le nombre d'années nécessaires pour que le placement B soit plus avantageux que le placement A.

☛ **Solution**:

Avec la calculatrice, il faut utiliser le menu table puis les fonctions Y_1 et Y_2
avec $Y_1 = 3000 + 180x$ et $Y_2 = 3000 \times 1,04^x$.

Ensuite, ne pas oublier de paramétrer le début et la fin du tableau de valeurs ainsi que le pas (ici 1) en utilisant RANG.

Pour $n = 20$ on a alors $C_{20} > D_{20}$
et pour $n \geq 21$, on a $C_{21} < D_{21}$.

Le capital du placement B devient supérieur au capital du placement A après 21 années.