Exercice 1 *(4 points)*

Pour une compétition internationale, le sélectionneur doit choisir entre deux tireurs à l'arc ont des performances définies par les loi de probabilités ci-dessous.
A chaque tir dans la cible, on associe un nombre de points. Plus la flèche est proche du centre de la cible, plus le nombre de points est élevé.
On note X et Y les variables aléatoires donnant le nombre de points obtenus à chaque tir respectivement par le tireur A et le tireur B.

Tireur A	1	2	3	4	5	10
probabilité	0,16	0,15	0,20	0,25	0,18	0,06

Tireur B	1	2	3	4	5	10
probabilité	0,03	0,1	0,51	0,21	0,11	0,04

Calculer l'espérance et l'écart type de chacune des deux variables aléatoires.
Pour l'écart type, on donnera les valeurs arrondies aux dixièmes.

☛ **Solution**:

$E(X) = 0,16 \times 1 + 0,15 \times 2 + 0,2 \times 3 + 0,25 \times 4 + 0,18 \times 5 + 0,06 \times 10$
$= 3,56$

$V(X) = 0,16 \times 1^2 + 0,15 \times 2^2 + 0,2 \times 3^2 + 0,25 \times 4^2 + 0,18 \times 5^2 + 0,06 \times 10^2 - 3,56^2$
$= 4,3864$
$\sigma(X) = \sqrt{4,3864} \simeq 2,1$

$E(Y) = 0,03 \times 1 + 0,1 \times 2 + 0,51 \times 3 + 0,21 \times 4 + 0,11 \times 5 + 0,04 \times 10$
$= 3,55$

$V(X) = 0,03 \times 1^2 + 0,1 \times 2^2 + 0,51 \times 3^2 + 0,21 \times 4^2 + 0,11 \times 5^2 + 0,04 \times 10^2 - 3,55^2$
$= 2,5275$
$\sigma(Y) = \sqrt{2,5275} \simeq 1,6$

Compte tenu de ces informations, quel tireur va choisir le sélectionneur ?

☛ **Solution**:

Les deux tireurs vont en moyenne obtenir le même nombre de points ($E(X) \simeq E(Y)$)
mais on a $\sigma(X) > \sigma(Y)$ donc si l'entraîneur veut que sont tireur obtienne un résultat proche don espérance, il devra choisir le deuxième tireur puisque ses tirs sont "plus proches" de sa moyenne de points obtenus.

Exercice 2 *(7 points)*

Le coût de production d'un objet est de 950 euros.
Cet objet eut présenter un défaut A, un défaut B, ou en même temps le défaut A et le défaut B.
La garantie permet de faire des réparations aux frais du fabricant avec les coûts suivants : 100 euros pour le défaut A et 150 euros pour le défaut B. On admet que 90% des objets produits n'ont aucun défaut, 5 % ont au moins le défaut A et 4% ont les deux défauts A et B..

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque objet choisi au hasard, associe son prix de revient, c'est à dire sont coût de production augmenté du coût de réparation éventuel.
Déterminer la loi de probabilité de X.

☛ **Solution**:

- Utilisation d'un tableau à double entrée

	A	$\overline{A}$	total
B	4	5	9
$\overline{B}$	1	90	91
total	5	95	100

- loi de probabilité de X :

X_i	950	1050	1100	1200
$p(X = X_i)$	$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{90}{100} = 0,9$	$p(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{100} = 0,01$	$p(\overline{A} \cap B) = \frac{5}{100} = 0,05$	$p(A \cap B) = \frac{4}{100} = 0,04$

2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de cette variable aléatoire.

☛ **Solution**:

$$E(X) = 950 \times 0,9 + 0,01 \times 1050 + 0,05 \times 1100 + 0,04 \times 1200 = 968,5$$

Que représente $E(X)$ pour l'usine ?

☛ **Solution**:

$E(X)$ représente le coût moyen par objet fabriqué pour un grand nombre d'objets.

3. On admet que tous les objets produits sont vendus.

a) L'usine peut-elle espérer réaliser des bénéfices en vendant 960 ? chaque objet vendu ?

☛ **Solution**:

Non, car le coût moyen minimal par objet est supérieur à 960 euros.

b) L'usine veut réaliser un bénéfice moyen de 100 euros par objet.
Expliquer comment on doit alors choisir le prix de vente de l'objet produit.

☛ **Solution**:

Elle devra donc vendre chaque objet $968,5 + 100 = 1068,5$ euros

Si l'objet n'a pas de défaut, le bénéfice sera de $1068,5 - 950 = 118,5$ euros, s'il a le défaut A, il sera de 81,5 euros, s'il a le défaut B, il sera de $-131,5$ euros et s'il a les deux défauts, il sera alors de $-231,5,5$ euros.

Exercice 3 *(9 points)*

Une urne contient 1 boule rouge et n boules blanches. On tire **successivement et avec remise** deux boules de l'urne.

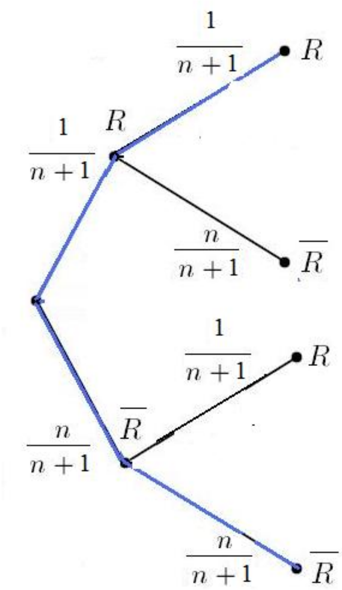
1. Exprimer en fonction de n la probabilité des événements suivants : M : « Les deux boules sont de la même couleur »N : « Les deux boules sont de couleur différente »

☛ **Solution**:

On note les événements :

R :« La boule tirée au hasard est rouge »

On peut représenter les divers cas possible avec un arbre de probabilités :



$$p(M) = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \times \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}$$
$$p(N) = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{2n}{(n+1)^2}$$

2. On considère le jeu suivant : le joueur perd $(n+1)^2$ euros si M est réalisé et gagne $2(n+1)^2$ euros sinon. On appelle X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) du joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

☛ **Solution**:

X_i	$-(n+1)^2$	$2(n+1)^2$
$p(X = X_i)$	$p(M) = \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}$	$p(N) = \dfrac{2n}{(n+1)^2}$

b) Démontrer que $E(X) = -n^2 + 4n - 1$.

☛ **Solution**:

$E(X) = -(n+1)^2 \times \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2} + 2(n+1)^2 \times \dfrac{2n}{(n+1)^2}$
$= -n^2 - 1 + 4n$
$= -n^2 + 4n - 1$

Pour les questions suivantes toute trace de recherche et raisonnement sera prit en compte.

c) Pour quelles valeurs de n le jeu est favorable au joueur ?

☛ **Solution**:

Le jeu est favorable au joueur si $E(X) > 0$

Signe de $-x^2 + 4x - 1$:

Racines : $\Delta = 16 - 4 \times (-1) \times (-1) = 12$

Deux racines : $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{12}}{-2} = \dfrac{-4-2\sqrt{3}}{-2} = 2 + \sqrt{3} \simeq 3,7$

et $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{12}}{-2} = \dfrac{-4+2\sqrt{3}}{-2} = 2 - \sqrt{3} \simeq 0,27$

donc $-x^2 + 4x - 1 > 0$ pour $x \in]2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}[$ (signe de $-a = 1$ entre les racines)

donc $E(X) > 0$ pour tout entier $n \int]2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}[$

et $n \in \mathbb{N}$ donc le jeu est favorable au joueur s'il y a 1, 2 ou 3 boules blanches.

d) Si on laisse choisir au joueur le nombre de boules blanches . Que doit il répondre ?

☛ **Solution**:

Le joueur doit essayer d'obtenir un gain maximal soit quand $E(X)$ est maximum.

Le coefficient de n^2 est négatif donc $E(X)$ atteint son maximum pour $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-4}{-2} = 2$ boules blanches.

Remarque : On peut aussi étudier les variations de $E(X)$

Si on pose $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ sur $[0; +\infty[$ alors $f'(x) = -2x + 4$

et $-2n + 4 > 0 \Longleftrightarrow n < 2$ donc f est croissante sur $[0; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$.........