Exercice 1 (*5 points*)

Le cycle des feux tricolores aux carrefours est le suivant :

- Le feu vert, événement V, dure 20 secondes.
- Le feu orange, événement O, dure 5 secondes.
- Le feu rouge, événement R, dure 35 secondes

Le temps total d'un cycle est donc de 1mn.

1. On note V l'événement :« le feu est vert lors du passage de l'automobiliste ».

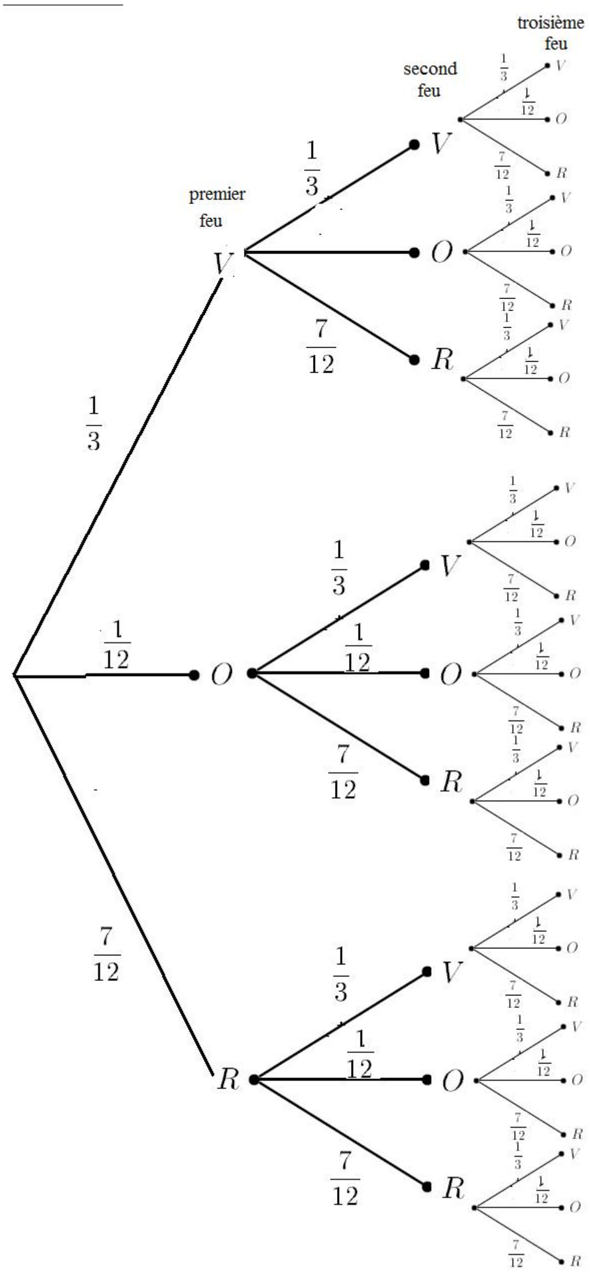
☛ **Solution**:

$$p(V) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

2. Un automobiliste rencontre successivement trois feux tricolores fonctionnant de de manière indépendante. Dresser un arbre pondéré illustrant la situation.

☛ **Solution**:

Les trois feux fonctionnent de manière indépendante donc les probabilités sont les mêmes à tous les niveaux(premier feu, deuxième feu et troisième feu) de l'arbre pondéré.



3. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) A :« l'automobiliste rencontre trois feux verts »

☛ **Solution**:

$$p(A) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

b) B :« l'automobiliste rencontre un feu vert, un feu rouge et un feu orange dans cet ordre »

☛ **Solution**:

$p(B) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{12} \times \dfrac{7}{12} = \dfrac{7}{432}$ (parcours en rouge sur l'arbre)

c) C :« l'automobiliste rencontre au moins un feu vert »

☛ **Solution**:

C est le contraire de l'événement D :« les trois feux ne sont pas verts »

$$p(C) = p(\overline{D}) = 1 - p(D) = 1 - (1 - \frac{1}{3})^3 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

Exercice 2 ——— *(6 points)*

Un QCM (questionnaire à choix multiples) est composé de cinq questions numérotées de 1 à 5.
Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte.

Partie A :

Un candidat répond à ce QCM, en cochant, au hasard et de façon indépendante, chacune des 5 questions.
On décide de donner au candidat un point par réponse exacte.
Soit X la variable aléatoire associant aux réponses du candidat la note obtenue sur 5.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.

☛ **Solution**:

On répète successivement cinq fois et de façon indépendante l'épreuve de Bernouilli consistant à répondre à une question du QCM ayant les deux issues possibles V(la réponse est exacte) et $\overline{V}$ avec la probabilité $p(V) = \dfrac{1}{4} = 0,25$

donc la loi de probabilité de X suit la loi binomiale de paramètres 5 et $0,25$.

2. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne la note maximale ?

☛ **Solution**:

On veut calculer $p(X = 5) = 0,25^5$

3. Etablir la loi de probabilité de X en complétant le tableau ci-dessous et en arrondissant les résultats aux millièmes :

☛ **Solution**:

Les valeurs possibles de X sont $0; 1; 2; 3; 4; 5$.

valeurs x_i	0	1	2	3	4	5
$p(X = x_i)$	$0,75^5 = \frac{243}{1024} \simeq 0,237$	$5 \times 0,25 \times 0,75^4 = \frac{405}{1024} \simeq 0,396$	$\binom{5}{2} \times 0,25^2 \times 0,75^3 = \frac{270}{1024} \simeq 0,264$	$\binom{50}{1} \times 0,25^3 \times 0,75^2 = \frac{90}{1024} \simeq 0,088$	$5 \times 0,25^4 \times 0,75 = \frac{15}{1024} \simeq 0,015$	$0,25^5 = \frac{1}{1024} \simeq 0,001$

4. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne plus de la moyenne ?

☛ **Solution**:

On doit calculer $p(X > 2,5) = p(X \geq 3) = p(X = 3) + p(X = 4) + p(X = 5) \simeq 0,104$

Remarque : Avec la calculatrice, on peut calculer directement $1 - p(X \leq 2)$ en utilisant les touches OPTN (options) puis STAT puis DIST puis BINM puis Bcd.

La syntaxe est la suivante en mode Calcul : $1 - BinomialCD(2, 5, 0.2)$

5. Quelle note le candidat peut-il espérer obtenir (c'est-à-dire quelle note moyenne obtiendrait-il s'il remplissait au hasard un très grand nombre de QCM) ?

☛ **Solution**:

$E(X) = 0 \times \frac{243}{1024} + 1 \times \frac{405}{1024} + 2 \times \frac{270}{1024} + 3 \times \frac{90}{1024} + 4 \times \frac{15}{1024} + 5 \times \frac{1}{1024} = 1,25$ ou bien plus simplement en utilisant l'espérance de la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,25$, on a $E(X) = n \times p = 5 \times 0,25 = 1,25$

Sur un grand nombre de QCM, le candidat peut espérer obtenir en moyenne 1,25 points.

Partie B :

On suppose que n candidats (n entier non nul) répondent à ce QCM, et que tous le font au hasard, indépendamment des autres.

1. Exprimer en fonction de n, la probabilité p_n qu'au moins un candidat obtienne la note 5.

☛ **Solution**:

On répète successivement et de manière indépendante l'épreuve de Bernouilli ayant les issues possibles S :« le candidat a obtenu 5 points » et $\overline{S}$

On a alors $p(S) = 0,25^5$

Si on note A :« au moins un candidat a obtenu la note 5 », A est le contraire de l'événement B :« aucun candidat n'a obtenu la note de 5 ».

$p(B) = (1 - 0,25^5)^n$

et $p_n = p(A) = 1 - p(B) = 1 - (1 - 0,25^5)^n$

Autre méthode : On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de candidats ayant obtenu 5 sur les n candidats.

On répète successivement cinq fois et de façon indépendante l'épreuve de Bernouilli ayant les issues possibles S :« le candidat a obtenu 5 points » et $\overline{S}$

On a alors $p(S) = 0,25^5$

donc la loi de probabilité de Y suit la loi binomiale de paramètres n et $0,25^5$.

La probabilité de l'événement A :« moins un candidat a obtenu 5 » se note $p(Y \geq 1) = 1 - p(Y = 0)$

et $p(Y = 0) = \binom{n}{0} \times p(S)^0 \times (1 - p(S))^n = (1 - 0,25^5)^n$

donc $p(A) = 1 - p(Y = 0) = 1 - (1 - 0,25^5)^n = 1 - \left(\frac{1023}{1024}\right)^5$

2. Pour quelles valeurs de n cet événement se produira-t-il avec une probabilité supérieure à 0,99 ?

☛ **Solution**:

Il faut résoudre $p_n > 0,99$ soit :

$1 - (1 - 0,25^5)^n > 0,99$

$\Longleftrightarrow -(1-0,25^5)^n > -0,01$

$\Longleftrightarrow (1-0,25^5)^n < 0,01$

Avec le menu Table de la calculatrice, on utilise la fonction $Y = (1-0,25^5)^x$.

On commence avec avec un pas de 100 (début 0 et fin 10 000 par exemple) et on cherche la valeur de n pour laquelle Y_1 est strictement inférieure à 0,01.

On obtient que $(1-0,25^5)^{4700} \simeq 0,0101$ et $(1-0,25^5)^{4800} \simeq 0,0091$

On a alors $n > 4700$.

On reprend le tableau de valeurs avec pour début 4700, fin=4800 et pas 1

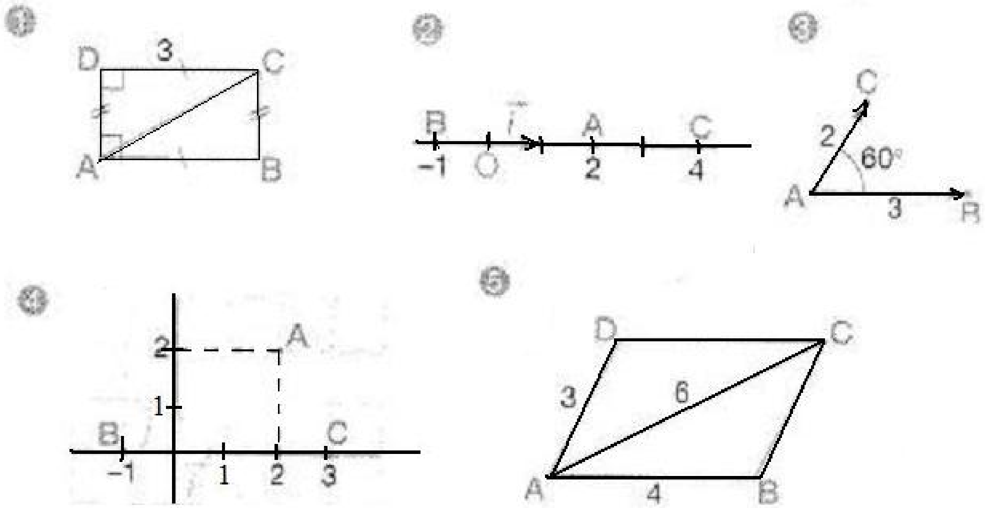
On obtient que $(1-0,25^5)^{4713} \simeq 0,010004$ et $(1-0,25^5)^{4714} \simeq 0,00999$

On a alors $n \geq 4714$.

A partir de 4714 candidats, la probabilité qu'au moins un obtienne une note égale à 5 est supérieure à 0,99.

Exercice 3 — *(5 points)*

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des 6 cas suivants :



☛ **Solution**:

1. ABCD est un rectangle donc B est le projeté orthogonal de C sur (AB)
   donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AB = AB^2 = 9$
2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = 3 \times 2 \times cos(\pi) = -6$
3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = 3 \times 2 \times cos(\frac{\pi}{3}) = 6 \times \frac{1}{2} = 3$
4. $\overrightarrow{AB}(-3;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-2)$
   donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -3 \times 1 + (-2) \times (-2) = 1$
5. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - ||\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}||^2}{2} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - CB^2}{2} = \dfrac{4^2 + 6^2 - 3^2}{2} = 21,5$

Exercice 4 — *(4 points)*

$ABCD$ est un rectangle, I est un point de $[DC]$ défini comme l'indique la figure ci-contre.

1. Démontrer que $(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IC} + DA^2$

   ☛ **Solution**:

$(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$
or $\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{CB}=0$
et $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{IC}=0$
donc $(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{DA}^2$

2. En déduire que : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=6$ et que $cos(\widehat{AIB}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

☛ **Solution**:

On a $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DB}$
$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IC}+DA^2$
$\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IC} = ID\times IC\times cos(\widehat{\overrightarrow{ID},\overrightarrow{IC}}) = 1\times 3\times cos(\pi) = -3$
donc $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IC}+DA^2 = -3+3^2 = 6$

☛ **Solution**:

Dans le triangle AID rectangle en D : $AI^2 = AD^2+ID^2 = 9+1 = 10$
Dans le triangle CIB rectangle en C : $BI^2 = CI^2+CB^2 = 9+9 = 18$
$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = IA\times IB\times cos(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}) = \sqrt{10}\times\sqrt{18}\times cos(\widehat{AIB})$
donc on a :
$\sqrt{10}\times\sqrt{18}\times cos(\widehat{AIB}) = 6 \Longleftrightarrow cos(\widehat{AIB}) = \dfrac{6}{\sqrt{180}} = \dfrac{6}{\sqrt{36\times 5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

3. Donner la mesure de l'angle $\widehat{AIB}$ en degrés à 0,1 degré près.

☛ **Solution**:

$cos(\widehat{AIB}) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$
donc $\widehat{AIB} = cos^{-1}(\dfrac{1}{\sqrt{5}}) \simeq 63,4^o$