Exercice 1 *(6 points)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé qu'on pourra représenter et compléter au fur et à mesure de l'exercice (non exigé)

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à la droite $d \quad : \quad 2x+y+3=0$ passant par $A(-4;5)$.

☛ **Solution:**

$\overrightarrow{n}(2;1)$ est un vecteur normal à la droite d donc est un vecteur directeur de Δ.

Δ admet une équation cartésienne de la forme $x-2y+c=0$

$A \in d \iff x_A - 2y_A + c = 0 \iff c = 14$

donc $\Delta : x - 2y + 14 = 0$

Autre méthode en utilisant le produit scalaire :

$\overrightarrow{u}(-1;2)$ est un vecteur directeur de (d) (rappel : $\overrightarrow{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur directeur de la droite d'´equation $ax+by+c=0$)

Soit $M(x;y) \in (\Delta)$

$\overrightarrow{AM}(x-(-4);y-5)$

$M \in (\Delta)$

$\iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ orthogonaux

$\iff x_{\overrightarrow{AM}}x_{\overrightarrow{u}} + y_{\overrightarrow{AM}}y_{\overrightarrow{u}} = 0$

$\iff (x+4)\times(-1)+(y-5)\times 2 = 0$

$\iff -x-4+2y-10=0$

$\iff -x+2y-14=0$

$\iff x-2y+14=0$

2. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(-2;3)$ et de rayon 3.

☛ **Solution:**

$M(x;y) \in \mathcal{C} \iff IM^2 = 3^2 \iff (x-(-2))^2+(y-3)^2 = 9$

Une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $I(-2;3)$ et de rayon 3 est donc $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

3. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre $[AB]$ avec $A(\frac{2}{3};-2)$ et $B(3;\frac{5}{3})$.

☛ **Solution:**

$M(x;y) \in \mathcal{C}' \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

- $\begin{cases} x_{\overrightarrow{AM}} = x_M - x_A = x - \frac{2}{3} \\ y_{\overrightarrow{AM}} = y_M - y_A = y-(-2) = y+2 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{AM}(x-\frac{2}{3};y+2)$

  $\begin{cases} x_{\overrightarrow{BM}} = x_M - x_B = x-3 \\ y_{\overrightarrow{BM}} = y_M - y_B = y - \frac{5}{3} \end{cases}$ donc $\overrightarrow{BM}(x-3;y-\frac{5}{3})$

- $M(x;y) \in \mathcal{C}'$

  $\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

  $\iff x_{\overrightarrow{AM}}x_{\overrightarrow{BM}} + y_{\overrightarrow{AM}}y_{\overrightarrow{BM}} = 0$

  $\iff (x-\frac{2}{3})(x-3)+(y+2)(y-\frac{5}{3}) = 0$

  $\iff x^2 - \frac{2}{3}x - 3x + 2 + y^2 + 2y - \frac{5}{3}y - \frac{10}{3} = 0$

$\iff x^2 - \dfrac{11}{3}x + y^2 + \dfrac{1}{3}y - \dfrac{16}{3} = 0$

Une équation du cercle $\mathcal{C}'$ est $x^2 - \dfrac{11}{3}x + y^2 + \dfrac{1}{3}y - \dfrac{4}{3} = 0$

Remarque : On peut aussi reprendre la méthode de la question 2 en cherchant les coordonnées du milieu I de [AB] et en calculant le rayon $r = \dfrac{AB}{2}$

Exercice 2 ———— *(8 points)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

1. Montrer que l'ensemble des points $M(x; y)$ dont les coordonnées vérifient l'équation $x^2+y^2+2x-6y+5 = 0$ est un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre I et le rayon.

☛ **Solution**:

$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0 \iff (x + 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 + 5 = 0 \iff (x - (-1))^2 + (y - 3)^2 = 5$

donc cette équation définit un cercle de centre $I(-1; 3)$ et de rayon $\sqrt{5}$

2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et des axes de coordonnées du repère. On notera A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe (Oy), A étant celui avec la plus petite ordonnée.

☛ **Solution**:

$M(x; y)$ appartient à l'axe des ordonnées si $x = 0$

et $M \in \mathcal{C}$

$\iff (0 - (-1))^2 + (y - 3)^2 = 5$

$\iff (y - 3)^2 = 4$

$\iff y - 3 = 2$ ou $y - 3 = -2$

$\iff y = 5$ ou $y = 1$

donc $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées en deux points A et B tels que $A(0; 1)$ et $B(0; 5)$

Intersection avec l'axe des abscisses :

☛ **Solution**:

$M(x; y)$ appartient à l'axe des abscisses si $y = 0$

et $M \in \mathcal{C}$

$\iff (x - (-1))^2 + (0 - 3)^2 = 5$

$\iff (x + 1)^2 = -4$

Cette équation n'admet pas de solution car $(x + 1)^2 > 0$

donc $\mathcal{C}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T au cercle $\mathcal{C}$ en A.

☛ **Solution**:

T est tangente au cercle en A si et seulement si $(IA) \perp (T)$ et $A \in (T)$

- $\begin{cases} x_{\overrightarrow{AI}} = x_I - x_A = -1 - 0 = -1 \\ y_{\overrightarrow{AI}} = y_I - y_A = 3 - 1 = 2 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{AM}(-1; 2)$

  Soit $M(x; y)$:

  $\begin{cases} x_{\overrightarrow{AM}} = x_M - x_A = x \\ y_{\overrightarrow{AM}} = y_M - y_A = y - 1 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{AM}(x + 1; y - 1)$

- $M(x;y) \in T$
$\iff \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AM} = 0$
$\iff x_{\overrightarrow{AI}}x_{\overrightarrow{AM}} + y_{\overrightarrow{AI}}y_{\overrightarrow{AM}} = 0$
$\iff -1 \times x + 2 \times (y-1) = 0$
$\iff -x + 2y - 2 = 0$
Une équation cartésienne de T est $-x + 2y - 2 = 0$

4. Donner une valeur approchée à $0,1^0$ de l'angle $\widehat{IAB}$ dans le triangle IAB.
(on pourra utiliser Al-Kashi)

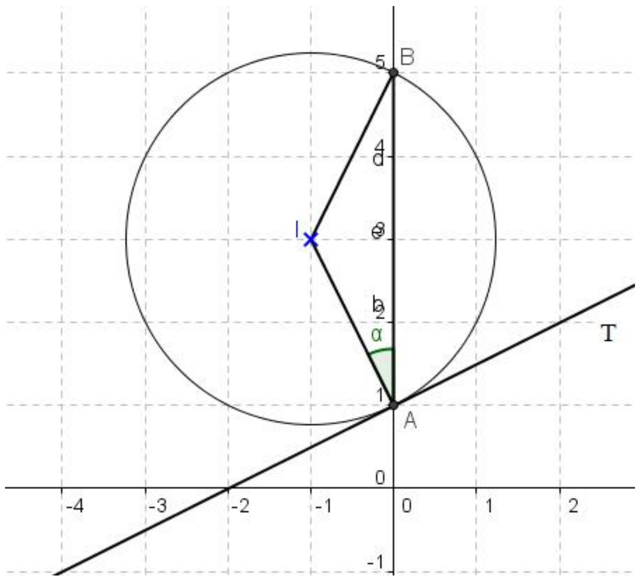
☛ **Solution**:

Dans le triangle IAB, on a :
$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{AI^2 + AB^2 - ||\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB}||^2}{2} = \dfrac{AI^2 + AB^2 - BI^2}{2}$
Calcul de AB : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 16$
et $AI^2 = BI^2 = 5$ (rayon du cercle)
donc $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{5 + 16 - 5}{2} = 8$

Remarque : On peut aussi calculer $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB}$ en utilisant les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}(0;4)$ et $\overrightarrow{AI}(-1;2)$.
$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = x_{\overrightarrow{AI}}x_{\overrightarrow{AB}} + y_{\overrightarrow{AI}}y_{\overrightarrow{AB}} = 0 \times (-1) + 4 \times 2 = 8$

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = AI \times AB \times cos(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}}) = \sqrt{5} \times \sqrt{16} cos(\widehat{IAB}) = 8$
donc $cos(\widehat{IAB}) = \dfrac{8}{\sqrt{5}\sqrt{16}} = \dfrac{8}{4\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$
donc $\widehat{IAB} = cos^{-1}(\dfrac{2}{\sqrt{5}}) \simeq 26,6^0$

annexe : Figure de l'ex 2 :



Exercice 3 (*6 points*)

1. Soient deux points A et B avec $AB = 6$, et soit I le milieu de $[AB]$.
Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 16$

a) Montrer que $M \in \mathcal{C} \iff MI^2 = 25$.
(on pourra décomposer $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ en introduisant le point I).

☛ **Solution**:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=16$
$\Longleftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=16$
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=16$
$\Longleftrightarrow MI^2+\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+IA\times IB\times cos(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}})=16$
or $\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}}=\pi$ radians
donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=16$ et $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{0}$
$\Longleftrightarrow MI^2+0+IA^2cos(\pi)=16$
$\Longleftrightarrow MI^2-\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2=16$ (rappel :$cos(\pi)=cos(-\pi)=-1$)
$\Longleftrightarrow MI^2-9=16$
$\Longleftrightarrow MI^2=25$

b) Déterminer alors précisément l'ensemble $\mathcal{C}$.

☛ **Solution**:

$MI^2=25 \Longleftrightarrow MI=5$ car $MI\geq 0$
donc M appartient au cercle de centre I et rayon 5.
L'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=16$ est donc cercle de centre I et rayon 5.

2. On donne $A(-1;2)$, $B(2;-2)$ et $C(-2;-1)$ dans un repère orthonormé.
En utilisant les coordonnées des vecteurs, déterminer précisément l'ensemble E
des points M du plan tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=3$

☛ **Solution**:

Soit $M(x;y)$

- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$:
$\begin{cases} x_{\overrightarrow{AM}}=x_M-x_A=x-(-1)=x+1 \\ y_{\overrightarrow{AM}}=y_M-y_A=y-2 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{AM}(x+1;y-2)$

- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$:
$\begin{cases} x_{\overrightarrow{BC}}=x_C-x_B=-2-2=-4 \\ y_{\overrightarrow{BC}}=y_C-y_B=-1-(-2)=1 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{BC}(-4;1)$

- $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=3$
$\Longleftrightarrow x_{\overrightarrow{AM}}x_{\overrightarrow{BC}}+y_{\overrightarrow{AM}}y_{\overrightarrow{BC}}=0$
$\Longleftrightarrow (x+1)\times(-4)+(y-2)\times 1=3$
$\Longleftrightarrow -4x-4+y-2=3$
$\Longleftrightarrow -4x+y-9=0$
donc l'ensemble E
des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=3$ est la droite d'équation cartésienne $-4x+y-9=0$