Exercice 1 *(4 points)*

1. Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n^2 + u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☛ **Solution**:

Pour tout entier n :

$u_{n+1} - u_n = 2u_n^2 + u_n + 3 - u_n = 2u_n^2 + 3$

$u_n^2 \geq 0$ donc $2u_n^2 + 3 \geq 3 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

2. (u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ telle que $u_1 = 12$ et $u_5 = 3072$: calculer q puis u_7.

☛ **Solution**:

(u_n) est une suite géométrique de raison $q > 0$ donc $u_n = u_0 \times q^n = u_1 \times q^{n-1}$

$u_5 = u_1 \times q^4 = 3072$

$\Longleftrightarrow 12 \times q^4 = 3072$

$\Longleftrightarrow q^4 = \dfrac{3072}{12} = 256$

$\Longleftrightarrow q = 4$ ou bien $q = -4$

or $q > 0$ donc $q = 4$

donc $u_7 = u_1 \times 4^6 = 12 \times 4096 = 49152$

3. Calculer $2 + 5 + 8 + \cdots + 299 + 302$.

☛ **Solution**:

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$.

$u_n = u_0 + n \times r = 2 + 3n$

- Recherche de n tel que $u_n = 302$

  $u_n = 2 + 3n = 302$

  $\Longleftrightarrow 3n = 300$

  $\Longleftrightarrow n = 100$

- Calcul de la somme $u_0 + u_1 + ... + u_{100} = 2 + 3 + 8 + ...302$

  $u_0 + u_1 + ... + u_{100} = 2 + 3 + 8 + ...302$

  $= 101 \times \dfrac{u_0 + u_{100}}{2}$

  $= 101 \times \dfrac{2 + 302}{2}$

$= 15352$

Remarque : On peut contrôler le résultat avec le menu RECUR de la calculatrice en saisissant la suite $a_n = 2 + 3n$

4. En utilisant une suite est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme, calculer $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 32768$.

☛ **Solution**:

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$.
$u_n = u_0 \times q^n = 2^n$

- Recherche de n tel que $u_n = 32768$
  $u_n = 2^n = 32768$

  Avec le menu TABLE de la calculatrice en saisissant la fonction $Y_1 = 2^x$ puis en paramétrant dans SET le début à 0, la fin du tableau de valeur à 100 par exemple et en prenant pour pas 1 (pour n'avoir que les valeurs de x entières, on obtient $2^{15} = 32768$
  donc $u_{15} = 32768$
  On peut aussi utiliser le menu RECUR de la calculatrice avec la suite de type a_n en saisissant $a^n = 2^n$ .....
  on obtient de même que $a_{15} = 32768$.
- Calcul de la somme $u_0 + u_1 + ... + u_{15} = 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 32768$
  $u_0 + u_1 + ... + u_{15} = 1 + 2 + 4 + 8 + ... + 32768$

  $= u_0 \times \dfrac{1 - 2^{16}}{1 - 2}$ La raison est 2 et il y a 15+1=16 termes

  $= \dfrac{1 - 2^{16}}{-1}$

  $= 2^{16} - 1$

  $= 65535$

Remarque : Comme pour la question précédente, on peut contrôler le résultat avec le menu RECUR de la calculatrice en saisissant la suite $a_n = 2^n$

Exercice 2 *(5 points)*

Le 1er janvier 2012,on a placé 5000 euros à intérêts composés au taux annuel de 4%.
(Cela signifie que les intérêts ajoutés au capital chaque nouvelle année sont égaux à 4% du capital de l'année précédente).
Chaque premier janvier, on place 200 euros supplémentaires sur ce compte.
On note $C_0 = 5000$ le capital disponible au premier janvier de l'année 2012 et C_n le capital disponible au 1er janvier de l'année $2012 + n$.

1. Calculer les valeurs exactes de C_1 et C_2.

☛ **Solution**:

$$C_1 = C_0 + \frac{4}{100}C_0 + 200 = 1,04C_0 + 200 = 1,04 \times 5000 + 200 = 5400$$

$$C_2 = C_1 + \frac{4}{100}C_1 + 200 = 1,04C_1 + 200 = 1,04 \times 5400 + 200 = 5816$$

2. Justifier que pour tout entier n, $C_{n+1} = 1,04C_n + 200$.

☛ **Solution**:

Comme pour le calcul de C_1 et C_2, on a :
$C_{n+1} = C_n + \frac{4}{100}C_n + 200 = C_n + 0,04C_n + 200 = 1,04C_n + 200$

3. Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

☛ **Solution**:

Une suite (u_n) est arithmétique si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.

Une suite (u_n) est géométrique si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.

Ici on a $C_{n+1} = 1,04C_n + 200$, donc (C_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

On peut aussi utiliser les termes C_0, C_1 et C_2, à savoir :
$C_1 - C_0 = 400$ et $C_2 - C_1 = 416$
donc (C_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{C_1}{C_0} = 1,08$ et $\frac{C_2}{C_1} \simeq 1,077$
donc (C_n) n'est pas géométrique.

4. Pour tout entier n, on pose $v_n = C_n + 5000$.

a) Calculer v_0

☛ **Solution**:

$v_0 = C_0 + 5000 = 10000$

Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

☛ **Solution**:

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= C_{n+1} + 5000 \\ &= 1,04C_n + 200 + 5000 \\ &= 1,04C_n + 5200 \\ &= 1,04(C_n + 5000) \\ &= 1,04v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 10000$ et de raison $q = 1,04$

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

☛ **Solution**:

(v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 10000$ et de raison $q = 1,04$

donc $v_n = v_0 \times q^n = 10000 \times 1,04^n$

puis de C_n en fonction de n

☛ **Solution**:

$v_n = C_n + 5000$ donc $C_n = v_n - 5000 = 10000 \times 1,04^n - 5000$

Pour les questions suivantes, toute démarche sera prise en compte dans l'évaluation.

5. Calculer le capital disponible à la fin de l'année 2020 arrondie à l'euro près.

☛ **Solution**:

C_n est le capital le premier janvier de l'année $2012 + n$.

donc pour la fin de l'année 2020, il faut prendre

$2021 = 2012 + 9$ donc il faut calculer C_9 et enlever les 200 euros versés le premier janvier 2021 pour obtenir la capital disponible fin 2020.

$C_9 = 10000 \times 1,04^9 - 5000 \simeq 9233$ (capital au premier janvier 2021)

$9233 - 200 = 9033$

Le capital disponible à la fin de l'année 2020 est 9033 euros environ (arrondi à l'euro)

6. Quel nombre minimal d'années devra-t-on attendre pour que le capital disponible dépassera-t-il 10000 euros euros ?

☛ **Solution**:

On veut $C_n > 10000$.

$C_n > 10000$

$\iff 10000 \times 1,04^n - 5000 > 10000$

$\iff 10000 \times 1,04^n > 15000$

$\iff 1,04^n > \dfrac{15000}{10000}$

$\iff 1,04^n > 1,5$

Avec le menu TABLE de la calculatrice en saisissant la fonction $Y_1 = 1,04^x$ puis en paramétrant dans SET le début à 0, la fin du tableau de valeur à 50 par exemple et en prenant pour pas 1 (pour n'avoir que les valeurs de x entières, on obtient $1,04^{10} \simeq 1,48$ et $1,04^{11} \simeq 1,54$

donc $n \geq 11$.

Le capital disponible sera supérieur à 10000 euros le premier janvier $2012 + 11 = 2023$

On peut aussi utiliser le menu RECUR de la calculatrice avec la suite de type a_{n+1} en saisissant $a_{n+1} = 1,04a_n + 200$ puis en paramétrant le début à $n = 0$ et la fin à 50 par exemple et $a_0 = 5000$

Exercice 3 ——— *(6 points)*

Soient (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5) \qquad et \qquad v_n = \frac{1}{4}(2^n - 4n + 5)$$

1. Calculer u_0, u_1

☛ **Solution:**

$$u_0 = \frac{1}{4}(2^0 + 4 \times 0 - 5) = \frac{-4}{4} = -1$$
$$u_1 = \frac{1}{4}(2^1 + 4 \times 1 - 5) = \frac{1}{4}$$

puis v_0 et v_1

☛ **Solution:**

$$v_0 = \frac{1}{4}(2^0 - 4 \times 0 + 5) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$
$$v_1 = \frac{1}{4}(2^1 - 4 \times 1 + 5) = \frac{3}{4}$$

2. Montrer que la suite (a_n) de terme général $a_n = u_n + v_n$ est géométrique de raison 2.

☛ **Solution:**

$$a_n = u_n + v_n$$
$$= \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5) + \frac{1}{4}(2^n - 4n + 5)$$
$$= \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5 + 2^n - 4n + 5)$$
$$= \frac{1}{4}(2^n + 2^n)$$
$$= \frac{1}{4}(2 \times 2^n)$$
$$= \frac{1}{2} \times 2^n \text{ (forme explicite } u_n = u_0 \times q^n)$$

donc (a_n) est une suite géométrique de premier terme $a_0 = u_0 + v_0 = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ et de raison $q = 2$.

On a donc $a_n = a_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$

Exprimer la somme $S_a(n) = a_0 + a_1 + ... + a_n$ en fonction de n

☛ **Solution:**

$$S_a(n) = a_0 + a_1 + ... + a_n = a_0 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - 2^{n+1}}{-1} = \frac{2^{n+1} - 1}{2}$$

3. Montrer que la suite (b_n) de terme général $b_n = u_n - v_n$ est arithmétique ;

☛ **Solution:**

$$b_n = u_n - v_n$$
$$= \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5) - \frac{1}{4}(2^n - 4n + 5)$$
$$= \frac{1}{4}(2^n + 4n - 5 - 2^n + 4n - 5)$$
$$= \frac{1}{4}(8n - 10)$$
$$= 2n - \frac{5}{2} \text{ (forme explicite } u_n = u_0 + nr)$$

donc (b_n) est une suite arithmétique de premier terme $b_0 = u_0 - v_0 = -1 - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{5}{2}$ et de raison $r = 2$.

$b_n = 2n - \dfrac{5}{2}$

Exprimer la somme $S_b(n) = b_0 + b_1 + ... + b_n$ en fonction de n.

☛ **Solution**:

$$S_b(n) = b_0 + b_1 + ... + b_n = (n+1) \times \frac{b_0 + b_n}{2} = (n+1) \times \frac{\frac{-5}{2} + 2n - \frac{5}{2}}{2} = (n+1) \times \frac{-5 + 2n}{2}$$

4. En déduire les sommes $S_u(n) = u_0 + u_1 + ... + u_n$

☛ **Solution**:

$S_a(n) = a_0 + a_1 + ... + a_n = u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + ...u_n + v_n$

$S_b(n) = b_0 + b_1 + ... + b_n = u_0 - v_0 + u_1 - v_1 + ...u_n - v_n$

En ajoutant membre à membre les deux égalités ci-dessous on a :

$S_a(n) = u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + ...u_n + v_n$

$S_b(n) = u_0 - v_0 + u_1 - v_1 + ...u_n - v_n$

$S_a(n) + S_b(n) = 2u_0 + 2u_1 + ...2u_n$

donc $u_0 + u_1 + ...u_n = \dfrac{S_a(n) + S_b(n)}{2}$

$$= \frac{\frac{2^{n+1} - 1}{2} + (n+1) \times \frac{-5 + 2n}{2}}{2}$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1 + (n+1) \times (-5 + 2n)}{4}$$

et $S_v(n) = v_0 + v_1 + ... + v_n$

☛ **Solution**:

En soustrayant membre à membre les deux égalités ci-dessous on a :

$S_a(n) = u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + ...u_n + v_n$

$S_b(n) = u_0 - v_0 + u_1 - v_1 + ...u_n - v_n$

$S_a(n) - S_b(n) = 2v_0 + 2v_1 + ... + 2v_n$

donc $v_0 + v_1 + ... + v_n = \dfrac{S_a(n) - S_b(n)}{2}$

$$= \frac{\frac{2^{n+1} - 1}{2} - (n+1) \times \frac{-5 + 2n}{2}}{2}$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1 + (n+1) \times (5 - 2n)}{4}$$

Exercice 4 (*5 points*)

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

On veut démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 3.

1. Calculer u_n pour $n \leq 4$

☛ **Solution:**

$$u_0 = \frac{3\dfrac{4}{9}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$u_1 = \frac{3\dfrac{2}{3}}{2} = 1$$

$$u_2 = \frac{3 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$u_3 = \frac{3\dfrac{3}{2}}{2} = \frac{9}{4}$$

$$u_4 = \frac{3\dfrac{9}{4}}{2} = \frac{27}{8}$$

2. Étudier le signe de $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ sur $[0; +\infty[$.

☛ **Solution:**

- Racines de $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
  $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 8$
  $\Delta > 0$ donc il y a une deux racines :
  $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 - \sqrt{8}}{-2} = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2}}{-2} = 1 + \sqrt{2}$
  et
  $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + \sqrt{8}}{-2} = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{-2} = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 \notin [0; +\infty[$
- Signe de $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

x	0		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
		signe de $-a = 1$	0	signe de $a = -1$	
$f(x) = -x^2 + 2x + 1$		$+$	0	-	

donc $f(x) > 0$ sur $[1 + \sqrt{2}; +\infty[$

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}$

☛ **Solution:**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{2n^2}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - 2n^2}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - 2n^2}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}}$$

4. En déduire que si $n \geq 3$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ puis conclure.

☛ **Solution**:

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}} = \dfrac{f(n)}{2^{n+1}}$
$2^{n+1} > 0$ donc $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $f(n)$.

D'après la question 2., $f(x) < 0$ pour $x > 1 + \sqrt{2}$
donc $f(n) < 0$ pour $n > 1 + \sqrt{2}$ soit pour $n \geq 3$.

On a donc $u_{n+1} - u_n < 0$ pour $n \geq 3$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante à partir de $n = 3$