Exercice 1 *(9 points)*

1. $\dfrac{2x^2-10x-5}{x+2}=x-3$
   - Recherche de D_f
     Il faut $x+2\neq 0$ soit $x\neq -2$
     On résout sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$
   - Pour tout réel $x\in D_f$:
     $\dfrac{2x^2-10x-5}{x+2}=x-3$
     $\Longleftrightarrow 2x^2-10x-5=(x+2)(x-3)$
     $\Longleftrightarrow 2x^2-10x-5=x^2-x-6$
     $\Longleftrightarrow x^2-9x+1=0$
     $\Delta=b^2-4ac=81-4=77$
     $\Delta>0$ donc il y a deux racines :
     $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{9-\sqrt{77}}{2}$
     et
     $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{9+\sqrt{77}}{2}$
     $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$
     donc $S=\left\{\dfrac{9-\sqrt{77}}{2};\dfrac{9+\sqrt{77}}{2}\right\}$

2. $x^4-6x^2+8=0$
   On pose $X=x^2$
   et il faut alors résoudre l'équation $X^2-6X+8=0$
   $\Delta=b^2-4ac=36-32=4$
   $\Delta>0$ donc il y a deux racines :
   $X_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{6-2}{2}=2$
   et
   $X_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{6+2}{2}=4$
   On doit résoudre :
   $x^2=2$ ou $x^2=4$
   $\Longleftrightarrow x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$ ou $x=2$ ou $x=-2$
   donc $S=\left\{-2;-\sqrt{2};\sqrt{2};2\right\}$

3. $\sqrt{3-x}=3x+5$
   - Il faut $3-x\geq 0\Longleftrightarrow 3\geq x$ soit $x\in]-\infty;3]$
     et $3x+5\geq 0\Longleftrightarrow x\geq\dfrac{-5}{3}$ soit $x\in\left[\dfrac{-5}{3};+\infty\right[$
     On résout sur $D_f=]-\infty;3]\cap\left[\dfrac{-5}{3};+\infty\right[=\left[\dfrac{-5}{3};3\right]$
   - Pour tout réel $x\in D_f$:
     $\sqrt{3-x}=3x+5$
     $\Longleftrightarrow 3-x=(3x+5)^2$
     $\Longleftrightarrow 3-x=9x^2+30x+25$
     $\Longleftrightarrow 9x^2+31x+22=0$
     $\Delta=b^2-4ac=169$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-31-13}{18} = \dfrac{-44}{18} = \dfrac{-22}{9}$
et
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-31+13}{18} = \dfrac{-18}{18} = -1$

- Ensemble de solution :

$x_1 \notin D_f$ et $x_2 \in D_f$
donc $S = \{-1\}$

4. $\sqrt{x^2+5x+6} = \sqrt{x+3}$

- Recherche de D_f :

Il faut $x^2+5x+6 \geq 0$
Recherche des racines :
$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-1}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3$
et
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+1}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2$
signe de x^2+6x+6 :
tableau de signes

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
x^2+5x+6		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $x \in]-\infty; -3] \cup [-2; +\infty[$

Il faut aussi $x+3 \geq 0$ soit $x \geq -3$
donc $D_f = (]-\infty; -3] \cup [-2; +\infty[v) \cap [-3; +\infty[= [-2; +\infty[$ (intersection des deux ensembles trouvés ci-dessus)

- Pour tout réel $x \in D_f$:

$\sqrt{x^2+5x+6} = \sqrt{x+3}$
$\iff x^2+5x+6 = x+3$
$\iff x^2+4x+3 = 0$

- Recherche des solutions de $x^2+4x+3=0$

$(-1)^2 - 4 + 3 = 0$ donc $x_1 = -1$ est une solution.
$x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \iff -x_2 = 3 \iff x_2 = -3$

- Ensemble de solution :

$x_1 \in D_f$ et $x_2 \notin D_f$ donc $S = \{-1\}$

5. $-2x^2+5x-3 > 0$

- Recherche des racines de $-2x^2+5x-3$

$-2+5-3=0$ donc $x_1 = 1$ est une racine.
$x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \iff x_2 = \dfrac{3}{2}$

- Signe de $-2x^2+5x-3$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+5x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Ensemble de solution :
  $S =]1; \frac{3}{2}[$

6. $\dfrac{2x^2-5x+1}{3-x} \leqslant 2$

- Il faut $3-x \neq 0$ soit $x \neq 3$
  donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
- Pour tout réel $x \in D_f$:
  $\dfrac{2x^2-5x+1}{3-x} \leqslant 2$
  $\iff \dfrac{2x^2-5x+1}{3-x} - 2 \leqslant 0$
  $\iff \dfrac{2x^2-5x+1-2(3-x)}{3-x} \leqslant 0$
  $\iff \dfrac{2x^2-5x+1-6+2x)}{3-x} \leqslant 0$
  $\iff \dfrac{2x^2-3x-5}{3-x} \leqslant 0$
- Racines de $2x^2-3x-5$
  $\Delta = b^2-4ac = 9+40 = 49$
  $\Delta > 0$ donc il y a deux racines :
  $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-7}{4} = -1$
  et
  $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+7}{4} = \dfrac{5}{2}$
- Tableau de signes

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
$2x^2-3x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{2x^2-3x-5}{3-x}$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

- Ensemble de solution
  $S = [-1; \frac{5}{2}] \cup]3; +\infty[$

Exercice 2 *(4 points)*

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = x^3-4x^2+3x+2$. On veut résoudre $P(x) = 0$.

1. $P(2) = 2^3 - 4 \times 2^2 + 3 \times 2 + 2 = 8 - 16 + 6 + 2 = 0$
donc 2 est une racine de $P(x)$

2. Pour tout réel x :
$P(x) = (x-2)(ax^2+bx+c)$

$= ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c$

$= ax^3 + bx^2 - 2ax^2 + cx - 2bx - 2c$

$= x^3 - 4x^2 + 3x + 2$

Par identification des coefficients :

$a = 1$

$b - 2a = -4 \iff b = -4 + 2a = -2$

$c - 2b = 3 \iff c = 3 + 2b = -1$

et on a bien $-2c = 2$

donc $P(x) = (x-2)(x^2 - 2x - 1)$

3. $P(x) = 0 \iff x - 2 = 0$ ou $x^2 - 2x - 1 = 0$

Recherche des racines de $x^2 - 2x - 1$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 4 = 8$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}$

et

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$

Donc $S = \left\{1-\sqrt{2}; 2; 1+\sqrt{2}\right\}$

Exercice 3 *(4 points)*

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x - 4$ et $g(x) = -3x^2 + 6x + 12$ et on note C_f et C_g les représentations graphiques de ces deux fonctions dans un repère orthogonal.

1. Le sommet de C_g a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-6}{-6} = 1$ et $\beta = g(\alpha) = g(1) = 15$

et le coefficient $a = -3$ de x^2 est négatif donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	15	$\searrow$	$-\infty$

2. $3x^2 - 4x - 4 > -3x^2 + 6x + 12$

$\iff 6x^2 - 10x - 16 > 0$

$\iff 3x^2 - 5x - 8 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 3 \times (-8) = 121$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-11}{6} = -1$

et

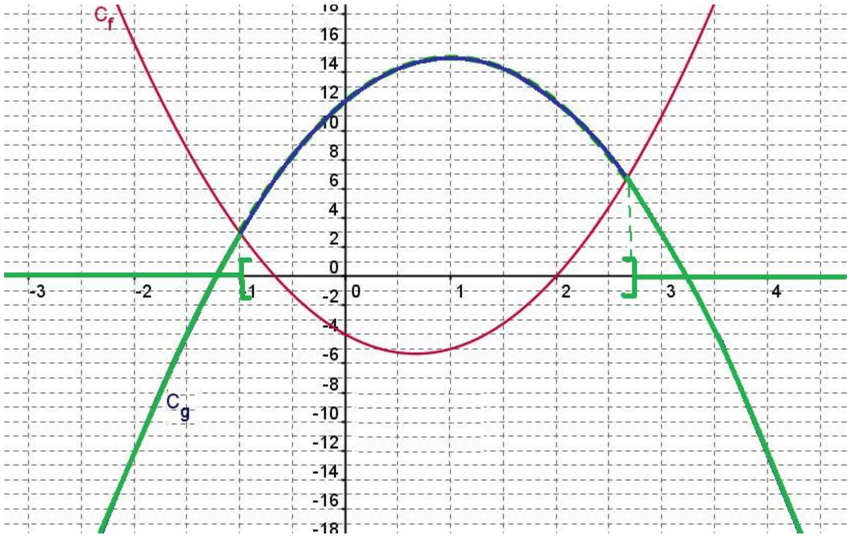
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+11}{6} = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
$3x^2 - 5x - 8$		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $S =]-\infty; -1[\cup]\dfrac{8}{3}; +\infty[$

Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ sont les abscisses des points de C_f situés strictement au-dessus de C_g

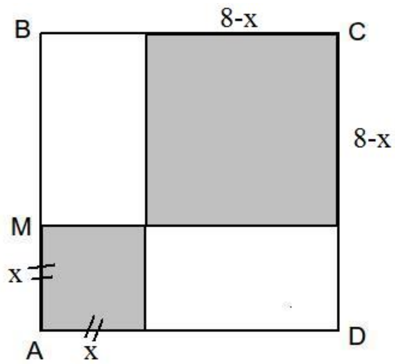
ce qui correspond à l'ensemble de solution obtenu par le calcul (zone en vert sur l'axe des abscisses).



Exercice 4 *(3 points)*

ABCD est un carré de côté 8cm et M est un point du segment [AB].

On partage alors le carré en quatre rectangles comme l'indique la figure et on note Ag l'aire du domaine coloré en gris sur la figure ci-dessous.



On pause $x = AM$ On a $x \geq 0$ (distance et $M \in [AB]$) et $8 - x \geq 0 \iff 8 \geq x$

donc $x \in [0; 8]$

On a Ag$= x^2 + (8-x)^2 = x^2 + 64 - 16x + x^2 = 2x^2 - 16x + 64 = 2(x^2 - 8x + 32)$

L'aire de ABCD est de 64 cm^2

Pour vérifier cette affirmation, il faut résoudre Ag$= 32$ soit $2x^2 - 16x + 64 = 32$

$2x^2 - 16x + 64 = 32$

$\iff 2x^2 - 16x + 32 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16^2 - 4 \times 2 \times 32 = 0$

donc l'équation admet **une unique solution** $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{16}{4} = 4$

on a alors partagé le carré en quatre carrés identiques de côté 4cm.

donc l'affirmation est exacte.

Autre méthode :

On pause $P(x) = Ag = 2x^2 - 16x + 64$

Coordonnées du sommet de la parabole : $\alpha = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{16}{4} = 4$

et $P(4) = 2 \times 4^2 - 16 \times 4 + 64 = 32$

et le coefficient de x^2 est positif donc on a le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	32	$\nearrow$	$+\infty$

Le maximum de f est 32 donc Ag= 32 pour $x = 4$ et c'est la seule valeur possible puisque c'est pour $x = 4$ que Ag est maximale et vaut 32.