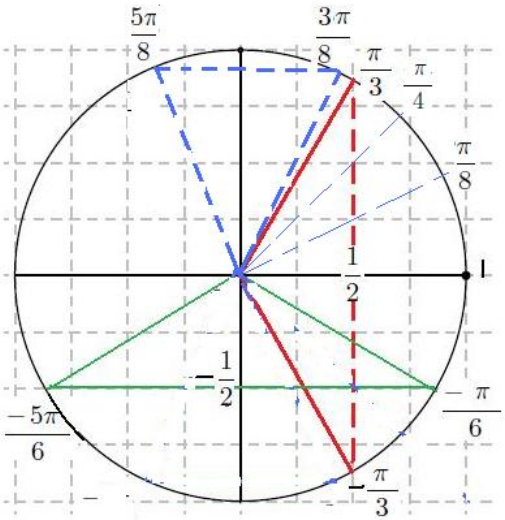
Exercice 1 *(3 points)*

Déterminer la mesure principale des angles, puis les placer sur le cercle trigonométrique ci-joint.



1. $-11 \div 3 \simeq -4$ (entier pair le plus proche)

$\frac{-11\pi}{3} + 4\pi = \frac{-11\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

2. $33 \div 9 \simeq 4$ (entier pair le plus proche)

$\frac{33\pi}{9} - 4\pi = \frac{33\pi}{9} - \frac{36\pi}{9} = \frac{-3\pi}{9} = \frac{-\pi}{3}$

3. $-17 \div 6 \simeq 2$

$\frac{-17\pi}{6} + 2\pi = \frac{-17\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{-5\pi}{6}$

Pour placer ce point sur le cercle :

$\frac{-5\pi}{6} = -\pi + \frac{\pi}{6}$

4. $\frac{-75\pi}{8}$

$-75 \div 8 \simeq -10$

$\frac{-75\pi}{8} + 10\pi = \frac{-75\pi}{8} + \frac{80\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$

Pour placer ce point sur le cercle :

$\frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$

Exercice 2 *(3 points)*

En utilisant les angles associés, exprimer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$:

1. $A = \cos(x-\pi) - \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$

$A = \cos(\pi - x) - \sin(x) - \cos(x) - (-\sin(x))$

$= -\cos(x) - \sin(x) - \cos(x) + \sin(x)$

$= -2\cos(x)$

2. $B = \sin x + \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \cos x - \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$B = \sin(x) - \sin(x) + \cos(x) - \cos(x)$

$= 0$

Calculer les expressions suivantes en utilisant les angles associés :

3. $C = \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{11\pi}{8} + \sin\frac{13\pi}{8}$

$C = \sin\frac{3\pi}{8} + \sin(\pi - \frac{3\pi}{8}) + \sin(\pi + \frac{3\pi}{8}) + \sin(2\pi - \frac{3\pi}{8})$

$= \sin\frac{3\pi}{8} + \sin(\frac{3\pi}{8}) - \sin(\frac{3\pi}{8}) - \sin(\frac{3\pi}{8})$

$= 0$

4. $D = \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} + \cos\frac{9\pi}{10}$

$D = \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos(\pi - \frac{2\pi}{5}) + \cos(\pi - \frac{\pi}{10})$

$= \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{2\pi}{5} - \cos(\frac{2\pi}{5}) - \cos(\frac{\pi}{10})$

$= 0$

Exercice 3 *(6 points)*

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

1. Sur $[0;3\pi[$: $\cos x = \dfrac{1}{2}$

- Résolution dans $\mathbb{R}$:

$\cos x = \dfrac{1}{2}$

$\iff \cos x = \cos(\dfrac{\pi}{3})$

$\iff x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

- Recherche des solutions appartenant à $[0;3\pi[$: *(remarque : $3\pi = \dfrac{9\pi}{3}$)*

Si $k = 0$: $x = \dfrac{\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{-\pi}{3} \notin [0;3\pi[$

Si $k = 1$: $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{-\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{5\pi}{3}$

Si $k = 2$: $x = \dfrac{\pi}{3} + 4\pi = \dfrac{13\pi}{3} \notin [0;3\pi[$ ou $x = \dfrac{-\pi}{3} + 4\pi = \dfrac{11\pi}{3} \notin [0;3\pi[$

Si $k = -1$: $x = \dfrac{\pi}{3} - 2\pi = \dfrac{-5\pi}{3} \notin [0;3\pi[$ ou $x = \dfrac{-\pi}{3} - 2\pi = \dfrac{-7\pi}{3} \notin [0;3\pi[$

donc sur $[0;3\pi[$: $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}; \dfrac{7\pi}{3}\right\}$

2. Sur $]-\pi;\pi]$: $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- Résolution dans $\mathbb{R}$:

$\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff \sin x = \sin(\dfrac{-\pi}{4})$

$\iff x = \dfrac{-\pi}{4} + k2\pi$ ou $x = -\pi + \dfrac{\pi}{4} + k2\pi = \dfrac{-3\pi}{4} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

- $S = \left\{\dfrac{-3\pi}{4}; \dfrac{-\pi}{4}\right\}$

3. Sur $[0;4\pi[$: $\cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

- Résolution dans $\mathbb{R}$:

$\cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3}$

$\iff x = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ ou $x = \dfrac{-2\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

- Recherche des solutions appartenant à $[0;4\pi[$: *(remarque : $4\pi = \dfrac{16\pi}{4}$)*

Si $k = 0$: $x = \dfrac{-\pi}{4} \notin [0;4\pi[$ ou $x = \dfrac{-3\pi}{4} \notin [0;4\pi[$

Si $k = 1$: $x = \dfrac{-\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{-3\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{5\pi}{4}$

Si $k = 2$: $x = \dfrac{-\pi}{4} + 4\pi = \dfrac{15\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{-3\pi}{4} + 4\pi = \dfrac{13\pi}{4}$

Si $k = 3$: $x = \dfrac{-\pi}{4} + 6\pi = \dfrac{23\pi}{4} \notin [0;4\pi[$ ou $x = \dfrac{-3\pi}{4} + 6\pi = \dfrac{21\pi}{4} \notin [0;4\pi[$

$S = \left\{\dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}; \dfrac{13\pi}{4}; \dfrac{15\pi}{4}\right\}$

Remarque : On résout sur $[0;4\pi[$ donc si $k < 0$, les solutions ne sont pas dans l'intervalle $[0;4\pi[$ (valeurs négatives pour x)

4. Sur $[0;2\pi[$: $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$

- Résolution dans $\mathbb{R}$:

$\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$

$\iff \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

ou bien

$\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\iff x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

- Recherche des solutions sur $[0; 2\pi[$: *(remarque :* $2\pi = \dfrac{12\pi}{6}$*)*

si $k = 0$: $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} \notin [0; 2\pi[$

ou bien $x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6} \notin [0; 2\pi[$

si $k = 1$: $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{13\pi}{6} \notin [0; 2\pi[$ ou $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{6}$

ou bien $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi \notin [0; 2\pi[$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{6}$

$S = \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

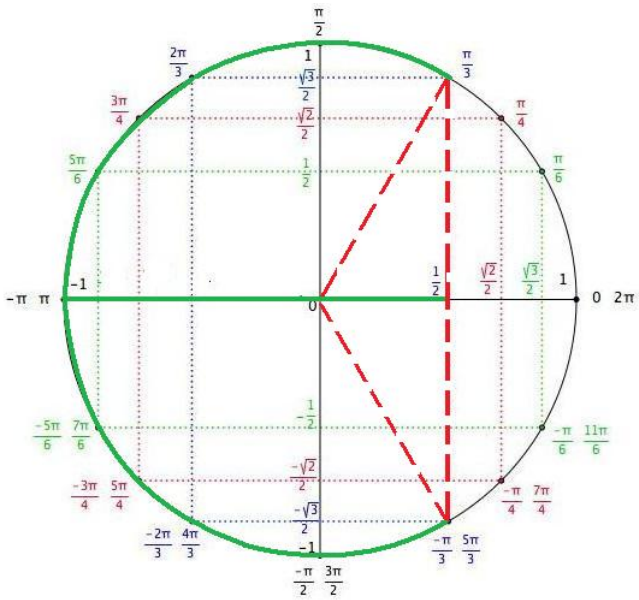
5. Sur $]-\pi; \pi]$: $6 - 12\cos x > 0$

$6 - 12\cos x > 0$

$\iff -12\cos(x) > -6$

$\iff \cos(x) < \dfrac{1}{2}$

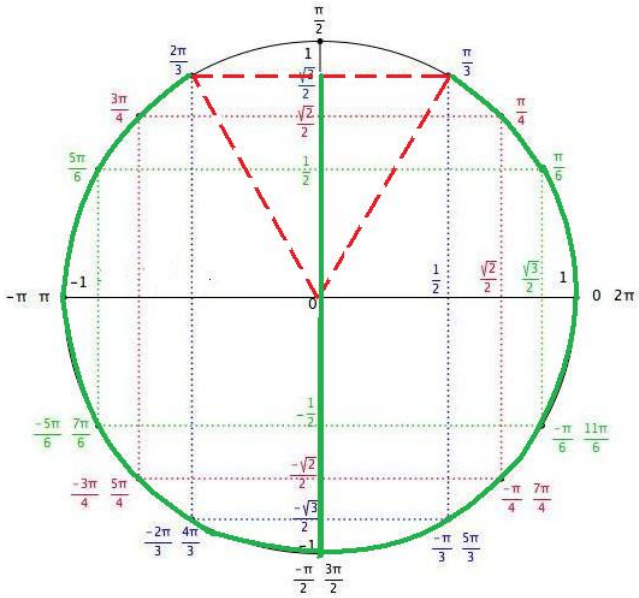
$\cos(x) = \dfrac{1}{2} \iff x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$



Sur $]-\pi; \pi]$: $S =]-\pi; -\dfrac{-\pi}{3}[\cup]\dfrac{\pi}{3}; \pi]$

6. Sur $]-\pi; 2\pi]$: $\sin x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + k2\pi = \dfrac{2\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$



Sur $]-\pi;2\pi]$: $S =]-\pi;\dfrac{\pi}{3}]\cup]\dfrac{2\pi}{3};2\pi]$

7. Sur $]-\pi;\pi]$: $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

On pose $X = \sin(x)$

Il faut donc résoudre $2X^2 - X - 1 = 0$

$X_1 = 1$ est une solution de cette équation

Le produit des deux solutions est : $X_1 \times X_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-1}{2}$ donc $X_2 = \dfrac{-1}{2}$

Il faut donc résoudre :

$\sin(x) = X_1 = 1$

$\iff x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\sin(x) = X_2 = \dfrac{-1}{2}$

$\iff x = \dfrac{-\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = -\pi + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi = \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

donc sur $]-\pi;\pi]$: $S = \left\{\dfrac{\pi}{2};\dfrac{-\pi}{6};\dfrac{-5\pi}{6}\right\}$

8. Sur $]-\pi;\pi]$: $\sin 2x = \sin\dfrac{\pi}{4}$

- Résolution dans $\mathbb{R}$:

  $\sin 2x = \sin\dfrac{\pi}{4}$

  $\iff 2x = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $2x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + k2\pi = \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

  $\iff x = \dfrac{\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

- Recherche des solutions sur $]-\pi;\pi]$: *(remarque* $\pi = \dfrac{8\pi}{8}$*)*

  Si $k = 0$: $x = \dfrac{\pi}{8}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{8}$

  Si $k = 1$: $x = \dfrac{\pi}{8} + \pi = \dfrac{9\pi}{8} \notin]-\pi;\pi]$ ou $x = \dfrac{3\pi}{8} + \pi = \dfrac{11\pi}{8} \notin]-\pi;\pi]$

  Si $k = -1$: $x = \dfrac{\pi}{8} - \pi = \dfrac{-7\pi}{8}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{8} - \pi = \dfrac{-5\pi}{8}$

  Si $k = -2$: $x = \dfrac{\pi}{8} - 2\pi = \dfrac{-15\pi}{8} \notin]-\pi;\pi]$ ou $x = \dfrac{3\pi}{8} - 2\pi = \dfrac{-13\pi}{8} \notin]-\pi;\pi]$

  donc $S = \left\{\dfrac{\pi}{8};\dfrac{3\pi}{8};\dfrac{-7\pi}{8};\dfrac{-5\pi}{8}\right\}$

Exercice 4 *(8 points)*

Partie A (2,5 points)

1. C_f passe par les points A(1 ;1) donc $f(1) = 1$

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente (d) d'équation $y = -x + 2$ à C_f au point d'abscisse 1

et $f'(1)$ est le coefficient directeur de la droite (d)

donc $f'(1) = -1$ (coefficient de x).

2. On pose $u(x) = x^2 + ax + b$ et $v(x) = x$

On a $u'(x) = 2x + a$ et $v'(x) = 1$

$f'(x) = \dfrac{(2x+a)x - (x^2+ax+b)}{x^2} = \dfrac{x^2-b}{x^2}$

3. $f(1) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1^2 + a \times 1 + b}{1} = 1 + a + b = 1 \Longleftrightarrow a + b = 0$

$f'(1) = \dfrac{1^2 - b}{1^2} = 1 - b = -1 \Longleftrightarrow -b = -2 \Longleftrightarrow b = 2$

donc $a + b = 0 \Longleftrightarrow a = -b = -2$

Partie B (4,5 points)

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x}$ et $f'(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2}$

$f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2$ car $x^2 > 0$

Racines de $x^2 - 2$: $x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{2}$ ou $x_2 = -\sqrt{2} \notin D_f$

donc f est croissante sur $[\sqrt{2}; +\infty[$

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		$-$ (*signe de* $-a$)	0	$+$ *signe de* $a = 1$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$f(\sqrt{2})$	$\nearrow$	

avec $f(\sqrt{2}) = \dfrac{2 - 2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = \dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2} - 4}{2} = 2 - 2\sqrt{2} \simeq 0,83$

2. $f(2) = \dfrac{2^2 - 4 + 2}{2} = 1$

et $f'(2) = \dfrac{2^2 - 2}{2^2} = \dfrac{1}{2}$

$y = f'(2)(x-2) + f(2) = \dfrac{1}{2}(x-2) + 1 = \dfrac{1}{2}x$

l'équation réduite de la tangente (d_1) à la courbe au point d'abscisse 2 est $y = \dfrac{1}{2}x$

3. Dans le repère donné en annexe, tracer C_f, (d) et (d_1).

Partie C (1 point)

1. D'après la partie B, le minimum de f est atteint pour $x = \sqrt{2} \simeq 1,414$ milliers de jouets par jour.

Le coût de production moyen d'un objet est de $0,83$ euro environ.

Chaque jouet est vendu 2 euros donc le bénéfice pour chaque jouet vendu est de $2 - 0,83 = 1,17$ euros environ.

On produit 1414 jouets par jour donc le bénéfice journalier est alors de $1414 \times 1,17 \simeq 1654$ euros arrondi à l'euro près.