Exercice 1 *(3 points)*

Déterminer la mesure principale des angles, puis les placer soigneusement sur le cercle trigonométrique ci-joint.

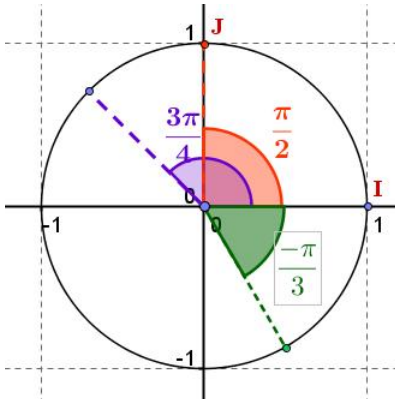
1. $\dfrac{-9\pi}{6}$

☛ **Solution**:

$-9 \div 6 = -1,5$ entier pair le plus proche : -2

$\dfrac{-9\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{-9\pi}{6} + \dfrac{12\pi}{6} = \dfrac{-3\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$

$\boxed{\text{La mesure principale est } \dfrac{\pi}{2}}$



2. $\dfrac{27\pi}{4}$

☛ **Solution**:

$27 \div 4 = 6,75$ entier pair le plus proche : 6

$\dfrac{27\pi}{4} - 6\pi = \dfrac{27\pi}{4} - \dfrac{24\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

$\boxed{\text{La mesure principale est } \dfrac{3\pi}{4}}$

3. $\dfrac{-127\pi}{3}$

☛ **Solution**:

$-127 \div 3 \approx 42,3$ entier pair le plus proche : 42

$\dfrac{-127\pi}{3} + 42\pi = \dfrac{-127\pi}{3} + \dfrac{126\pi}{3} = \dfrac{-\pi}{3}$

$\boxed{\text{La mesure principale est } \dfrac{-\pi}{3}}$

Exercice 2 *(6 points)*

Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle indiqué à l'aide d'un cercle trigonométrique.

1. $cos(x) = 0$ dans $[0; 2\pi]$

☛ **Solution**:

$cos(x) = 0$

$\iff x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ ou $x = \dfrac{-\pi}{2} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Sur $[0; 2\pi]$:

Si $k = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{-\pi}{2} \notin [0; 2\pi]$

Si $k = 1$, on a $x = 2\pi$, $x = \dfrac{5\pi}{2} \notin [0; 2\pi]$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$

$$\boxed{\text{donc } S = \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}}$$

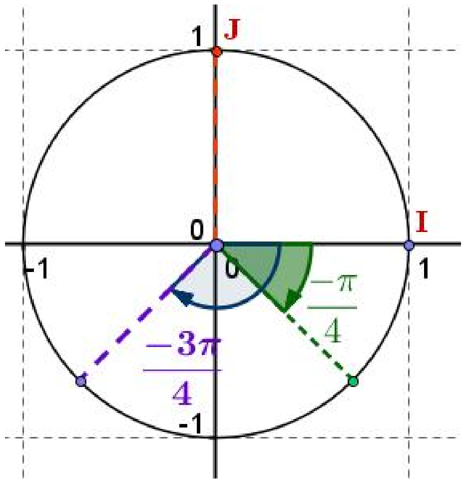
Remarque

Si $k \geq 2$, on a $x > 2\pi$ et si $k \leq -1$, on a $x < 0$

2. $sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $\mathbb{R}$

☛ **Solution**:

On a $sin(\dfrac{-\pi}{4}) = sin(\dfrac{-3\pi}{4}) = -sin(\dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



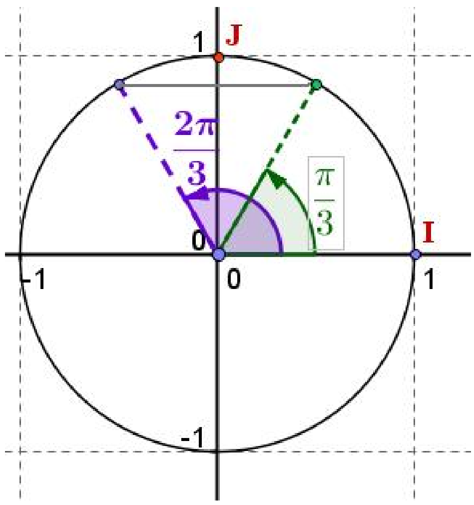
$$sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Longleftrightarrow x = \frac{-\pi}{4} + k2\pi \text{ ou } x = \frac{-3\pi}{4} + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{S = \left\{\frac{-\pi}{4} + k2\pi; \frac{-3\pi}{4} + k2\pi\right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}}$$

3. $sin(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[-\pi; \pi]$

☛ **Solution**:

On a $sin(\dfrac{\pi}{3}) = sin(\pi - \dfrac{\pi}{3}) = sin(\dfrac{2\pi}{3}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$$sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$\iff 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Si $k = 0$: $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$

Si $k = 1$: $x = \frac{7\pi}{6} \notin [-\pi;\pi]$ ou $x = \frac{4\pi}{3} \notin [-\pi;\pi]$

Si $k = -1$: $x = \frac{-5\pi}{6}$ ou $x = \frac{-2\pi}{3}$

Si $k = -2$: $x = \frac{-11\pi}{6} \notin [-\pi;\pi]$ ou $x = \frac{-5\pi}{3} \notin [-\pi;\pi]$

Sur $[-\pi;\pi]$:

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3};\frac{-5\pi}{6};\frac{-2\pi}{3}\right\}}$$

4. $cos(\pi - x) = \frac{1}{2}$ dans $[-\pi;\pi]$

☛ **Solution**:

On a $cos(\frac{\pi}{3}) = cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$$cos(\pi - x) = \frac{1}{2}$$
$\iff \pi - x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $\pi - x = \frac{-\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\iff -x = -\pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $-x = -\pi + \frac{-\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\iff -x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi$ ou $-x = \frac{-4\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\iff x = \frac{2\pi}{3} - k2\pi$ ou $x = \frac{4\pi}{3} - k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Si $k = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3} \notin [-\pi;\pi]$

Si $k = 1$, $x = \frac{-4\pi}{3} \notin [-\pi;\pi]$ ou $x = \frac{-2\pi}{3}$

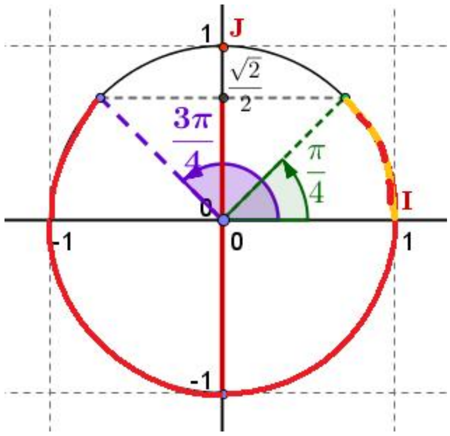
$$\boxed{S = \left\{\frac{2\pi}{3};\frac{-2\pi}{3}\right\}}$$

Exercice 3 ——— *(3,5 points)*

Résoudre les inéquations ci-dessous dans $[0;2\pi[$: a. $sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

☛ **Solution**:

On a $sin(\frac{\pi}{4}) = sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = sin(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Zone orange et pointillés rouges : $[0; \frac{\pi}{4}]$

Zone rouge : $[\frac{3\pi}{4}; 2\pi]$

$$\boxed{S = [0; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}; 2\pi]}$$

b. $-2\sqrt{3}\ \ cos(x) < 3$

☛ **Solution**:

$-2\sqrt{3}\ \ cos(x) < 3$

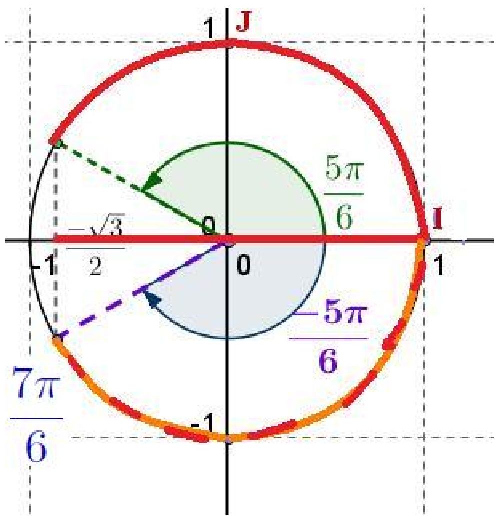
$\Longleftrightarrow cos(x) > \dfrac{3}{-2\sqrt{3}}$ *(On divise par un réel négatif donc l'inégalité change de sens)*

$\Longleftrightarrow cos(x) > \dfrac{3\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}\sqrt{3}}$

$\Longleftrightarrow cos(x) > \dfrac{\sqrt{3}}{-2}$

$\Longleftrightarrow cos(x) > \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

On a $cos(\dfrac{5\pi}{6}) = cos(-\dfrac{5\pi}{6}) = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$



Zone rouge : $[0; \frac{5\pi}{6}[$

Zone orange et pointillés rouges : $]\frac{7\pi}{6}; 2\pi]$

$$\boxed{S = [0; \frac{5\pi}{6}[\cup]\frac{7\pi}{6}; 2\pi]}$$

Exercice 4 *(2,5 points)*

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $2cos^2(x) + 3cos(x) - 2 = 0$

☛ **Solution**:

On pose $X = cos(x)$ (donc $X \in [-1; 1]$)
Il faut alors résoudre $2X^2 + 3X - 2 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 25$
$\Delta > 0$ donc il y a deux racines :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-5}{4} = -2$
et
$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}$
$X = cos(x)$
Il faut résoudre $cos(x) = -2$: pas de solution car $cos(x) \in [-1; 1]$
et $cos(x) = \dfrac{1}{2}$
$\iff x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ ou $x = \dfrac{-\pi}{3} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
On résout dans $\mathbb{R}$ donc :

$$\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi ; \frac{-3\pi}{3} + k2\pi\right\} \; k \in \mathbb{Z}}$$

Exercice 5 *(2 points)*

Sans calculatrice et avec les détails des calculs.

1. Ecrire l'expression suivante en fonction de $sin(x)$: $cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - sin(-x) + sin(\pi - x)$

☛ **Solution**:

$cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - sin(-x) + sin(\pi - x)$
$= -sin(x) - (-sin(x)) + sin(x)$
$= sin(x)$

$$\boxed{cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - sin(-x) + sin(\pi - x) = sin(x)}$$

2. Calculer $cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + 2cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right) + cos\left(\dfrac{-\pi}{12}\right)$

☛ **Solution**:

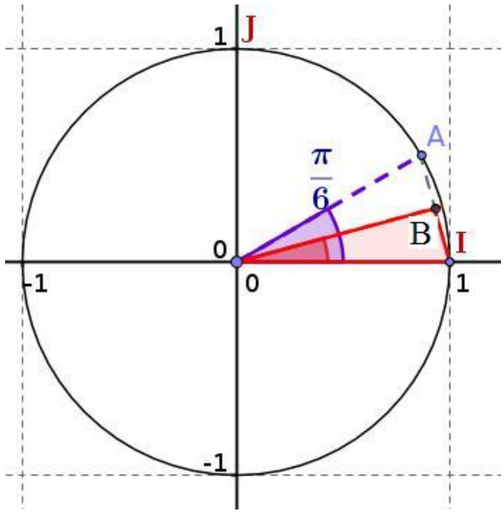
$cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + 2cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right) + cos\left(\dfrac{-\pi}{12}\right)$
$= cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + 2cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{12}\right) + cos\left(\dfrac{-\pi}{12}\right)$
$= cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - 2cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
$= 0$

$$\boxed{cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = 0}$$

Exercice 6 (*3 points*)

$\mathcal{C}$ désigne le cercle trigonométrique de centre O et le point I est le point de coordonnées $(1;0)$.
On note A le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
B est le milieu de $[IA]$.

1. Déterminer les coordonnées de A puis de B.



☛ **Solution:**

$$x_A = cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y_A = sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{A(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})}$$

B est le milieu de $[IA]$ donc :

$$x_B = \frac{x_I + x_A}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

et

$$y_B = \frac{y_I + y_A}{2} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{B(\frac{2+\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{4})}$$

2. Calculer la distance OB.

☛ **Solution:**

$$\begin{aligned} OB &= \sqrt{(x_B - x_O)^2 + (y_B - y_O)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4 + 2 \times 2 \times \sqrt{3} + 3}{16} + \frac{1}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{8 + 4\sqrt{3}}{16}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{4(2+\sqrt{3})}{16}}$$
$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

$$\boxed{OB = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

3. Déterminer la mesure principale de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$ et en utilisant le triangle OBI, calculer la valeur exacte de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

☛ **Solution**:

$OI = OA$ donc OAI est isocèle en I
B est le milieu de $[IA]$ donc (OB) est la médiane issue de O dans OAI
OAI isocèle en O
donc (OB) est aussi la hauteur issue de O dans OAI et la bissectrice de l'angle $\widehat{AOI}$
$(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB})$ a donc pour mesure principale $\frac{\pi}{6} \div 2 = \frac{\pi}{12}$
(OB) est la hauteur issue de O dans le triangle OAI donc OBI est un triangle rectangle en B.
On a alors dans ce triangle :
$cos(\widehat{IOB}) = \frac{OB}{OI}$
donc $cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{1}$

$$\boxed{cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

Remarque
On peut contrôler le résultat avec la calculatrice