Polynôme de degré 3

Voir le corrigé

Soit P le polynôme défini par $P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$.
On cherche à résoudre l'équation $P(x) = 0$

1. Vérifier que 1 est solution de l'équation $P(x) = 0$.

2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.
(*On admettra que tout polynôme admettant* α *comme racine peut se factoriser par* $(x - \alpha)$)

3. Résoudre $P(x) > 0$.

Voir le texte de l'exercice

$P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$.

1. $P(1) = 1^3 + 4 - 1 - 4 = 0$
donc 1 est une solution de l'équation.

2. $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c = x^3+4x-x-4$
Par identification des coefficients :
$a = 1$
$b - a = 4 \Longleftrightarrow b = 4 + a = 5$
$c - b = -1 \Longleftrightarrow c = -1 + b = 4$
et $-c = -4$ ce qui est vérifié puisque il a été trouvé $c = 4$ ci-dessus.
donc $P(x) = (x-1)(x^2+5x+4)$

3. Pour étudier le signe de $P(x)$, il faut étudier le signe de $x^2 + 5x + 4$

- Recherche des racines de $x^2 + 5x + 4$
  $(-1)^2 + 5 \times (-1) + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$
  donc $x_1 = -1$ est une racine de $x^2 + 5x + 4$
  Le produit des deux racines x_1 et x_2 est :
  $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a} = 4$ donc $x_2 = -4$
  Remarque : On peut aussi calculer Δ et on a alors $\Delta = 9$
- Signe de $x^2 + 5x + 4$
  $x^2 + 5x + 4$ est du signe de $a = 1$ coefficient de x^2 à l'extérieur des racines soir pour $x \in]-\infty;-4[\cup]-1;+\infty[$
- Signe de $P(x) = (x-1)(x^2+5x+4)$

  donc $P(x) > 0$ pour $x \in]-4;-1[\cup]1;+\infty[$
  soit $S =]-4;-1[\cup]1;+\infty[$