Table des matières

1 Rappel du cours :

Le plan est muni d'un repère **orthonormé**.

Cas 1 : avec le diamètre et le produit scalaire

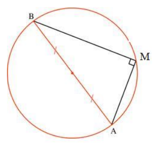
on considère le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$ (A et B distincts) avec $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$.

Avec le produit scalaire

Soit $M(x; y)$ un point de $\mathcal{C}$.

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\iff (x - x_A)(x - x_B) - (y - y_A)(y - y_B) = 0$



Cas 2 : avec le centre et le rayon

Si on note $C(x_O; y_O)$ le centre du cercle $\mathcal{C}$ et r son rayon ($r = \dfrac{AB}{2}$), on a alors :

$M \in \mathcal{C} \iff ||\overrightarrow{CM}|| = r \iff CM^2 = r^2$

Equation : $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$

2 Déterminer une équation du cercle connaissant le diamètre

Dans un repère orthonormé, on donne $A(2; -3)$ et $B(-4; 1)$.

Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$.

2.1 méthode

Soit $M(x; y) \in \mathcal{C}$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ puis du vecteur $\overrightarrow{BM}$

2. calculer $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}$

3. Equation du cercle : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

2.2 Application

Soit $M(x; y)$ un point du cercle $\mathcal{C}$.

- $\begin{cases} x_{\overrightarrow{AM}} = x_M - x_A = x - 2 \\ y_{\overrightarrow{AM}} = y_M - y_A = y - (-3) = y + 3 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{AM}(x-2; y+3)$

  $\begin{cases} x_{\overrightarrow{BM}} = x_M - x_B = x - (-4) = x + 4 \\ y_{\overrightarrow{BM}} = y_M - y_B = y - 1 = y - 1 \end{cases}$ donc $\overrightarrow{BM}(x+4; y-1)$
- $M(x;y) \in \mathcal{C}$

  $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

  $\Longleftrightarrow x_{\overrightarrow{AM}}x_{\overrightarrow{BM}} + y_{\overrightarrow{AM}}y_{\overrightarrow{BM}} = 0$

  $\Longleftrightarrow (x-2)(x+4) + (y+3)((y-1) = 0$

  $\Longleftrightarrow x^2 + 4x - 2x - 8 + y^2 - y + 3y - 3 = 0$

  $\Longleftrightarrow x^2 + 2x + y^2 + 2y - 11 = 0$

Une équation de $\mathcal{C}$ est $x^2 + 2x + y^2 + 2y - 11 = 0$

3 Déterminer une équation du cercle connaissant le centre et le rayon

Dans un repère orthonormé, on donne $C(1; -2)$.

Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre C et rayon 3 unités.

3.1 méthode

Soit $M(x;y) \in \mathcal{C}$

1. Exprimer CM^2 en fonction de x et y

Rappel : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

2. Equation du cercle : $CM^2 = r^2$ soit $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$

3.2 Application

Soit $M(x;y)$ un point du cercle $\mathcal{C}$.

- $CM^2 = (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = (x-1)^2 + (y - (-2))^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2$
- $M \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = r^2 = 3^2$

Une équation de $\mathcal{C}$ est $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$

4 Déterminer le centre et le rayon du cercle connaissant une équation

4.1 Méthode

Objectif : Ecrire l'équation donnée sous la forme $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$

où C est le centre du cercle et r son rayon.

1. Utiliser les identités remarquables pour écrire $x^2 + \alpha x$ sous la forme $(x - \frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\alpha^2}{4}$

Par exemple $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$

$x^2 + 10x = (x+5)^2 - 25$ en effet $(x-5)^2 - 25 = x^2 + 10x + 25 - 25 = x^2 10x$

2. Utiliser cette méthode pour obtenir $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2$

4.2 Application

Les équations suivantes définissent-elles un cercle ?

Si oui, préciser le centre et le rayon.

1. $x^2 - 6x + y^2 - 4x + 5 = 0$

2. $x^2 + 3x + y^2 - 4x + 4 = 0$

3. $x^2 + 2x + y^2 + 10 = 0$

☛ **Solution**:

1. $x^2 - 6x + y^2 - 4x + 5 = 0$

$\Longleftrightarrow (x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 5 = 0$ *(Remarque : $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ soit $(x-3)^2 - 9 = x^2 - 6x$)*

$\Longleftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 - 8 = 0$

$\Longleftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 8$

Cette équation définit un cercle de centre $C(3;2)$ et rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

2. $x^2 + 3x + y^2 - 4x + 4 = 0$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (y-2)^2 - 4 + 4 = 0$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 - \frac{9}{4} = 0$

$\left(x - \left(\frac{-3}{2}\right)\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{9}{4}$

Cette équation définit un cercle de centre $C\left(\frac{-3}{2}; 2\right)$ et rayon $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

3. $x^2 + 2x + y^2 + 10 = 0$

$\Longleftrightarrow (x+1)^2 - 1 + y^2 + 10 = 0$

$\Longleftrightarrow (x+1)^2 + y^2 + 9 = 0$

$\Longleftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = -9$

Il n'existe aucun point $M(x;y)$ vérifiant cette équation. (r^2 ne peut-être négatif)