Chapitre 1 : suites liées-algorithme-convergence (BAC Asie 2012)

EXERCICE 1-9-5 ★★★ temps estimé:30-45mn

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictement positif non nul b ($b > a$) Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANT QUE $n < N$ Affecter à n la valeur $n+1$ Affecter à u la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u, afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $a = 4$, $b = 9$ et $N = 2$. Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

☛ **Solution**:

n	a	b	u	v
0	4	9		
1	$6,5$	$6,964$	$\frac{4+9}{2} = 6,5$	$\sqrt{\frac{4^2+9^2}{2}} = \sqrt{\frac{97}{2}} \approx 6,964$
2	6,732	6,736	$\frac{6,5+6,964}{2} \approx 6,732$	$\sqrt{\frac{6,5^2+6,964^2}{2}} \approx 6,736$

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$$

2.a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

☛ **Solution**:

On note P_n la propriété $u_n > 0$ et P'_n la propriété $v_n > 0$

-initialisation

On a $b > a > 0$ et $u_0 = a$ et $v_0 = b$

donc P_0 et P'_0 sont vraies

-Hérédité

On suppose qu'il existe un entier naturel n tel que P_n et $P'n$ soient vraies soit $u_n > 0$ et $v_n > 0$

On a alors $u_n + v_n > 0$ donc $\dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$

donc $u_{n+1} > 0$ soit P_{n+1} vraie.
$\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2} > 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}}$
On a $v_{n+1} > 0$ soit P'_{n+1} vraie

On a donc montré par récurrence que P_n et P'_n sont vraies pour tout entier naturel n

donc $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout entier naturel n.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$.

En déduire que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n$.

☛ **Solution**:

$$\begin{aligned}
v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 &= \left(\sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}\right)^2 - \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2\\
&= \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \frac{(u_n + v_n)^2}{4}\\
&= \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2}{4}\\
&= \frac{2u_n^2 + 2v_n^2}{4} - \frac{u_n^2 + 2u_nv_n + v_n^2}{4}\\
&= \frac{2u_n^2 + 2v_n^2 - v_n^2 - 2u_nv_n - v_n^2}{4} \quad \text{⚠ signe } - \text{ devant la barre de fraction}\\
&= \frac{u_n^2 - 2u_nv_n + v_n^2}{4}\\
&= \frac{(u_n - v_n)^2}{2^2}\\
&= \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

donc $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$

$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = (v_{n+1} + v_{n+1})(v_{n+1} - u_{n+1})$
$v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\dfrac{u_n - v_n}{2}\right)^2$ donc $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geq 0$

$u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout entier naturel n donc on a $u_{n+1} + v_{n+1} > 0$

donc $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 \geq 0$ et est donc du signe de $v_{n+1} - u_{n+1}$

donc $v_{n+1} - u_{n+1} \geq 0$ soit $v_{n+1} \geq u_{n+1}$ pour tout entier naturel n et on a aussi $v_0 > u_0$

donc $u_n \leq v_n$ pour tout entier naturel n.

3.a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Solution:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n + v_n}{2} - u_n \\ &= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} \\ &= \frac{v_n - u_n}{2} \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente $u_n \leq v_n$ donc $v_n - u_n \geq 0$

donc la suite (u_n) est croissante.

b) Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).

Solution:

$$\begin{aligned} v_{n+}^2 - v_n^2 &= \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}^2 - v_n^2 \\ &= \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - v_n^2 \\ &= \frac{u_n^2 - v_n^2}{2} \end{aligned}$$

Or $0 < u_n < v_n$ donc $u_n^2 < v_n^2$ soit $u_n^2 - v_n^2 < 0$

donc $v_{n+1}^2 - v_n^2 < 0$

Comme $v_n > 0$ pour tout entier n, on a donc $v_{n+1} > v_n$

donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Solution:

On a (u_n) croissante.

(v_n) est décroissante donc $v_n \leq v_0$ soit $v_n \leq b$

Pour tout entier naturel n, on a $u_n \leq v_n \leq b$

donc la suite (u_n) est croissante et majorée par b donc convergente.

La suite (v_n) est décroissante.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq u_0$ et $u_n \geq v_n$

donc $a \leq u_n \leq v_n$

donc la suite (v_n) est décroissante et minorée par a

$\boxed{\text{donc la suite } (v_n) \text{ est convergente.}}$

WWW.MATHS-LYCEE.FR

MATHS-LYCEE.FR objectif BAC –Chapitre 1 : suites