Fiche TD : bases de logique

On considère A et B deux propositions (par exemple : « x est un nombre pair », « ABCD est un parallélogramme », « AB=BC »,...).

Condition nécessaire

Une implication entre (P) et (Q) signifie que si la condition (P) est vraie alors la condition (Q) est également vraie.
On peut noter :

- $(P) \Longrightarrow (Q)$ (se lit (P) implique (Q)).
- Si (P) alors (Q)
- (Q) est nécessaire pour avoir (P)

Exemple 1
A, B, C et D sont quatre points du plan.
ABCD est un parallélogramme est une condition nécessaire pour que ABCD soit un losange.
avec la notation ci-dessus : ABCD est un losange $\Longrightarrow$ ABCD soit un parallélogramme.

Condition suffisante

(Q) est une condition suffisante de (P) si (P) est vraie lorsque (Q) est vraie.
On a alors a l'autre sens de l'implication, on utilise l'une des formulations suivantes :

- $(P) \Leftarrow (Q)$ (non utilisé)
- $(Q) \Longrightarrow (P)$
- (Q) est suffisant pour avoir (P)

Exemple 2
A, B, C et D sont quatre points du plan.
ABCD est un carré est une condition suffisante pour que ABCD soit un losange.
avec les notations : ABCD est un carré $\Longrightarrow$ ABCD soit un losange mais par contre la réciproque est fausse.
Il existe des parallélogrammes qui ne sont pas des losanges. La condition n'est pas suffisante.

Condition nécessaire et suffisante

Lorsqu'une condition est à la fois nécessaire et suffisante, on a alors équivalence (« si et seulement si ») et P et Q ont simultanément vraies.

- $(P) \Longleftrightarrow (Q)$ (se lit (P) équivaut à (Q)).
- (P) si et seulement si (Q)

Exemple 3
Soit ABCD un quadrilatère.
ABCD un losange si, et seulement si, les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.
avec les notations : ABCD est un losange $\Longleftrightarrow$ les diagonales de ABCD se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires
on utilise aussi l'équivalence lors de la résolution d'équations et d'inéquations :
x est un réel.
$3x - 4 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{4}{3}$

Exercice 1

Pour chacune des affirmations suivantes :

- dire si elle est vraie ou fausse. Dans le cas où elle est fausse, donner un contre-exemple.
- dire si 'affirmation réciproque est vraie ou fausse.
- conclure alors sur les énoncés où l'on peut employer : « si et seulement si », c'est à dire sur les cas où énoncé direct et énoncé réciproque sont tous les deux vrais.

1. Si je suis espagnol, alors je suis européen.

2. Si je suis enfant unique, alors je n'ai ni frère ni soeur.

3. Si je suis français, alors je suis guadeloupéen.

En Géométrie :

4. Soit ABC un triangle. Si ABC est équilatéral, alors ABC est isocèle.

5. Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.

6. Soit ABCD un quadrilatère. Si ABCD est un parallélogramme, alors $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.

7. Soient 3 points A, B et I.
Si I est le milieu de [AB], alors $IA = IB$.

8. Soient 3 points A, B et C.
Si A, B et C sont alignés, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

9. Soient 3 points distincts A, B et C.
Si C appartient au cercle de diamètre $[AB]$, alors ABC est rectangle en C.

10. Soient 3 points distincts A, B et C.
Si $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, alors A, B et C sont alignés.

En Algèbre :

11. x est un nombre entier.
Si x est pair, alors x se termine par 2.

Pour la suite, x est un nombre réel

12. Si $x \leq 1$, alors $x < 2$.

13. Si $x^2 = 16$, alors $x = 4$.

14. Si $-3x > -9$, alors $x < 3$.

15. Si $x = 2$, alors x est solution de l'équation : $-2x + 4 = 0$.

Exercice 2

a et b sont deux nombres réels :
On considère les propositions
(1) : $a^2 = b^2$ (2) : $a = b$ (3) : $a = -b$ (4) : $(a + b)(a?b) = 0$
(5) : $a = b$ ou $a = -b$ (6) : $a = 0$ ou $b = 0$

1. Quelles sont les implications du type (1) $\Longrightarrow$ ... vraies ?

2. Quelles sont les implications du type ... $\Longrightarrow$ (1)vraies ?

3. Quelles sont les propositions équivalentes ?

4. Application : résoudre l'équation $(2x - 3)^2 = (2x + 9)^2$

Exercice 3

Compléter si cela est possible avec $\Longrightarrow$ ou $\Longleftrightarrow$:

1. Pour tout réel x : $(x - 1)(x + 2) = (x - 1)(3x + 5) \ldots x + 2 = 3x + 5$

2. Pour tout réel $x \neq 1$: $(x - 1)(x + 2) = (x - 1)(3x + 5) \ldots x + 2 = 3x + 5$

3. Pour tout réel $x \neq 2$: $\dfrac{2x - 3}{x - 2} > 1 \ldots 2x - 3 > x - 2$

4. Pour tout réel $x > 2$: $\dfrac{2x - 3}{x - 2} > 1 \ldots 2x - 3 > x - 2$

Exercice 4 : complément (raisonnement par l'absurde)

On veut démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel (ne peut s'écrire sous forme d'une fraction)

Cette démonstration peut se faire par l'absurde, c'est à dire en supposant que $\sqrt{2}$ est un rationnel et en montrant alors que c'est impossible.

Si $\sqrt{2}$ est un rationnel, alors il s'écrit sous la forme d'une fraction **irréductible** $\dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers relatifs non nuls.

1. a) Vérifiez que $p^2 = 2q^2$
b) Déduisez-en que p^2 est pair.

2. a) Démontrez que si p est pair, alors p^2 est pair et si p est impair, alors p^2 est impair.
b) Déduisez-en que p est pair.

3. Puisque p est pair, il existe p' tel que $p = 2p'$
a) Démontrez alors que $q^2 = 2p'^2$
b) Déduisez-en, à l'aide des questions précédentes que q est pair.

4. Pourquoi les réponses des questions 2 et 3 sont-elles contradictoires avec l'hypothèse ? Déduisez-en que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.