

Définition : fonction polynôme de degré 2

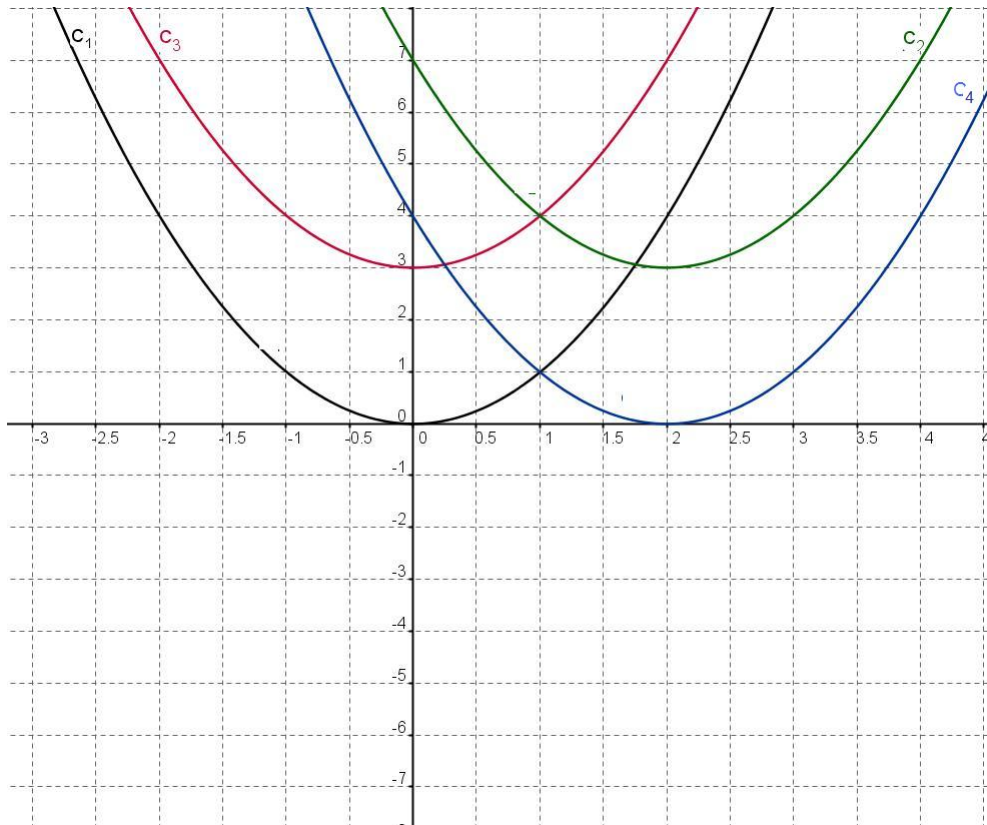
f est une fonction polynôme de degré 2 si et seulement si il existe trois réels a , b et c avec $a \neq 0$ tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$

La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole.

1 Cas $a = 1$

On donne f , g et h et i définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = (x - 2)^2$ et $i(x) = (x - 2)^2 + 3$.

- On a représenté graphiquement les quatre fonctions données ci-dessus dans un repère orthogonal. A chaque fonction, associer la représentation graphique correspondante.



- Quelle translation permet d'obtenir la courbe représentative de h , g et i à partir de celle de f ?
- Rappeler le tableau de variation de f (fonction carré) et donner ensuite celui des fonctions g , h et i .
- En déduire l'extremum de i .
Montrer par le calcul que le minimum de i est 3. (rappel : pour montrer que α est un extremum d'une fonction f , il faut étudier le signe de $f(x) - \alpha$)

2 cas $a = -1$

Dans le repère ci-dessus, tracer la représentation graphique des fonctions $f_1(x) = -x^2$ et $i_1(x) = -(x-2)^2 - 3$.

3 cas général

3.1 exemple 1

On donne la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ (ici $a = 2$, $b = -4$ et $c = 5$)

- Montrer que pour tout réel x , on a $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$ (forme **canonique** de f)

2. En s'inspirant de ce qui a été fait ci-dessus, quel sera le minimum de f ? pour quelle valeur de x sera-t-il atteint?
justifier ce résultat par le calcul. (voir 1.4)
3. En déduire le tableau de variation de f .
Calculer $\frac{-b}{2a}$, que constate-t'on?

3.2 Cas général

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul et b et c réel.

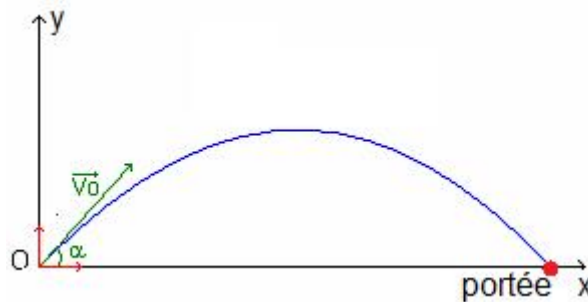
1. Montrer que pour tout réel x , on a $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \alpha$ (forme **canonique** de f)
avec $\alpha = c - \frac{b^2}{4a}$
2. En s'inspirant de ce qui a été fait dans l'exemple 1, quel sera le minimum ou le maximum de f ? pour quelle valeur de x sera-t-il atteint?
3. En déduire le tableau de variation de f en distinguant le cas $a > 0$ et $a < 0$.

3.3 application : balistique

La balistique est l'étude d'un objet au voisinage du sol. L'objet subit alors trois forces, son poids $m\vec{g}$, la poussée d'Archimède \vec{F} et le frottement de l'air \vec{f} .

Si on étudie le mouvement d'un objet à la surface de la planète, il n'y a pas de poussée d'Archimède, et on peut négliger le frottement de l'air et à condition que l'altitude et la distance parcourue soient très inférieures au rayon de la planète, sinon la pesanteur n'est plus constante et la trajectoire est parabolique (sinon elle devient elliptique, c'est le cas des satellites).

Si on lance un projectile de masse m avec une vitesse initiale \vec{V}_0 faisant un angle α avec l'horizontale, l'équation de sa trajectoire dans un repère orthonormé ayant pour origine le point de départ (voir schéma) est donnée par $y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2\cos^2(\alpha)} + x\tan(\alpha)$ avec $g \simeq 9,8 \text{ ms}^{-2}$ et V_0 en ms^{-1} . y et x sont alors exprimées en mètres.



On lance une balle avec une vitesse initiale de 10 ms^{-1} faisant un angle de 30° avec l'horizontale.

1. Donner l'équation de la trajectoire dans un repère orthonormé en arrondissant les coefficients aux centièmes.
2. En utilisant le menu TABLE de la calculatrice, représenter graphiquement y en fonction de x en prenant 2cm pour 1mètre.
3. Déterminer alors graphiquement avec le maximum de précision autorisée par le graphique, l'altitude maximale de la balle et la portée du lancer.
4. Retrouver, en utilisant les résultats du cas général, l'altitude maximale de la balle et la portée du lancer par le calcul.