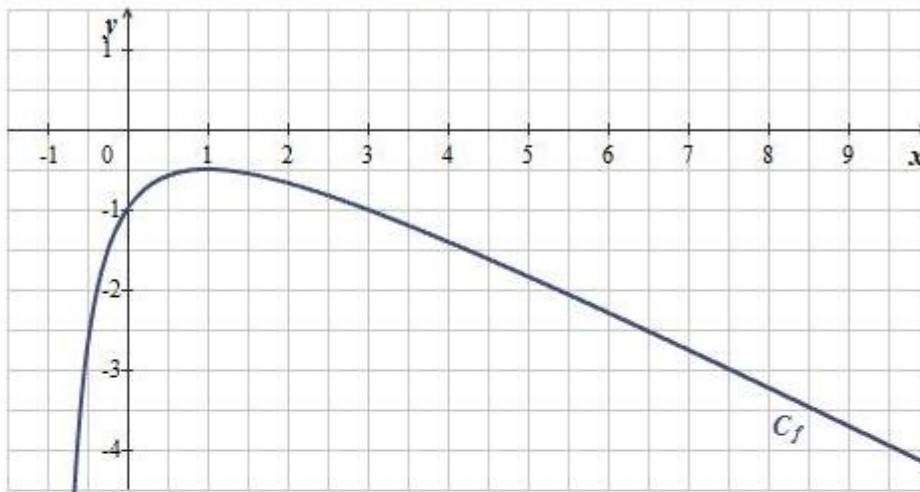


Enoncé :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{x+1}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.



1. a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
En déduire l'existence d'une asymptote pour la courbe C_f .
- b. Montrer que la courbe C_f admet une deuxième asymptote d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$.
- c. Tracer sur le graphique précédent, les asymptotes à la courbe C_f .
2. On note f' la dérivée de la fonction f .
 - a. Calculer $f'(x)$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$.
 - c. Donner le tableau complet des variations de f .

Voir le corrigé

Voir le texte de l'exercice

1. a. $\circ \lim_{x \rightarrow -1^+} x+1 = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x+1} = +\infty$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow -1^+} 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{x+1} = -\infty$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

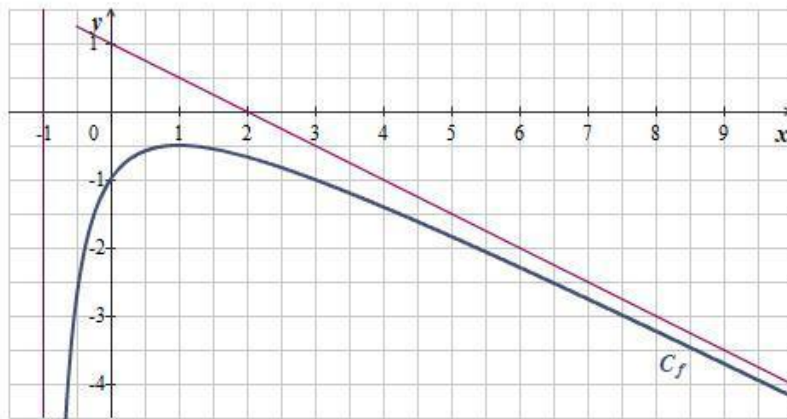
alors la courbe C_f admet pour asymptote la droite d'équation $x = -1$.

$\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$. Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{x+1} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b. $f(x) - \left(-\frac{x}{2} + 1\right) = -\frac{2}{x+1}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$ donc :

la courbe C_f admet pour asymptote la droite d'équation $y = -\frac{x}{2} + 1$ en $+\infty$.

c.



2. a. À partir des formules usuelles de dérivation on trouve :

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{(x+1)^2}$$

b. Pour tout réel x de l'intervalle $]-1; +\infty[$,

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{-(x+1)^2 + 4}{2(x+1)^2} = \frac{(2-(x+1))(2+(x+1))}{2(x+1)^2} = \frac{(1-x)(3+x)}{2(x+1)^2}$$

Ainsi, $f'(x) = \frac{(1-x)(3+x)}{2(x+1)^2}$.

Or sur l'intervalle $]-1; +\infty[$, $3+x > 0$ et $2(x+1)^2 > 0$

donc $f'(x)$ est du même signe que $1-x$.

D'où le tableau établissant le signe de $f'(x)$:

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		$+$	$-$

c. Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée.

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		$-\frac{1}{2}$	

Diagram illustrating the variation of the function $f(x)$ based on the sign of its derivative $f'(x)$.

The derivative $f'(x)$ is positive for $x < 1$ and negative for $x > 1$. The function $f(x)$ increases from $-\infty$ to a maximum value of $-\frac{1}{2}$ at $x = 1$, and then decreases towards $-\infty$ as x approaches $+\infty$.

Calcul du maximum :
$$f(1) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$