TES **Devoir $n^o 7$** durée 1h-20 points

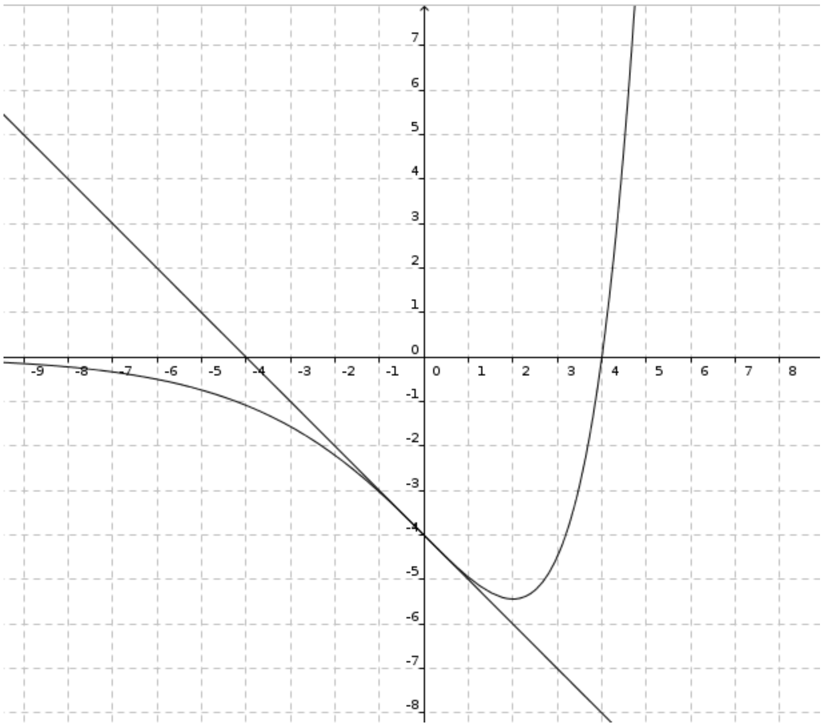
Exercice 1 *(7 points)*

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$e^{-2x-1} > 0$ $\qquad$ $e^{x^2} = e^{-3x+2}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2X^2 - 3X + 5 = 0$
En déduire les solutions de l'équation $-2e^{2x} - 3e^x + 5 = 0$

Exercice 2 *(13 points)*

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A(0 ; −4) passe par le point B(2 ; −6).



On désigne par f' la fonction dérivée de f.

1. a) Donner la valeur de $f(0)$.
b) Justifier que : $f'(0) = -1$.

2. a) On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x,
$f(x) = (x + a)\mathrm{e}^{bx}$.
Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = (bx + ab + 1)\mathrm{e}^{bx}$.
b) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes des réels a et b.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = (x - 4)\mathrm{e}^{0,5x}$$

1. Donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x ; en déduire le sens de variation de la fonction f sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

2. a) Calculer la dérivée seconde f'' de f et vérifier que pour tout réel x, $f''(x) = 0,25xe^{0,5x}$
b) Prouver que le point A est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

3. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = f(x) + x + 4$. On admet que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$.
a) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$
b) Déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente $\mathcal{T}$