Exercice 1 (*7 points*)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$e^{-2x-1} > 1$

☛ **Solution**:

Rappel : $e^0 = 1$

$e^{-2x-1} > 0$

Pour tout réel x, on a $e^x > 0$

donc pour tout réel x, $e^{-2x-1} > 0$

$\boxed{S = \mathbb{R}}$

$e^{x^2} = e^{-3x+2}$

☛ **Solution**:

$e^{x^2} = e^{-3x+2}$

$\Longleftrightarrow x^2 = -3x + 2$

$\Longleftrightarrow x^2 + 3x - 2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times (1) \times (-2) = 17$

$\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$

et

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$

$$\boxed{S = \left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{2}; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2X^2 - 3X + 5 = 0$

☛ **Solution**:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times (-2) \times 5 = 49$

$\Delta > 0$ donc il y a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-7}{-4} = 1$

et

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+7}{-4} = \dfrac{10}{-4} = \dfrac{-5}{2}$

$$\boxed{S = \left\{\frac{-5}{2}; -1\right\}}$$

En déduire les solutions de l'équation $-2e^{2x} - 3e^x + 5 = 0$

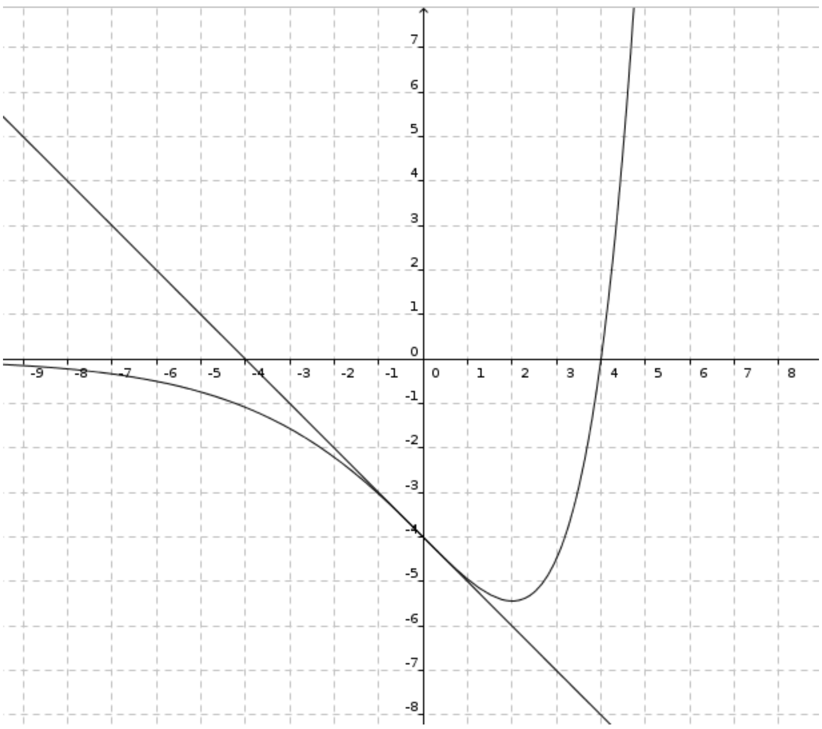
☛ **Solution**:

On pose $X = e^x$
et on a alors $e^{2x} = e^{x^2} = X^2$
Il faut donc résoudre l'équation $-2X^2 - 3X + 5 = 0$
d'après la question précédente, on a :
$X = 1$ ou bien $X = \dfrac{-5}{2}$
Or $X = e^x$, faut donc résoudre :
$e^x = 1$ et $e^x = \dfrac{-5}{2}$
$e^x = 1$
$\Longleftrightarrow e^x = e^1$
$\Longleftrightarrow x = e$
et
$e^x = \dfrac{-5}{2}$ n'admet aucune solution car $e^x > 0$ pour tout réel x

$\boxed{S = -1}$

Exercice 2 (*13 points*)

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A$(0\,;-4)$ passe par le point B$(2\,;\,-6)$.



On désigne par f' la fonction dérivée de f.

1. a) Donner la valeur de $f(0)$.

☛ **Solution**:

Le point $A(0; -4) \in \mathcal{C}$

$\boxed{\text{donc } f(0) = -4}$

b) Justifier que : $f'(0) = -1$.

☛ **Solution**:

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0

donc $f'(0) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -1$

$\boxed{\text{donc } f'(0) = -1}$

2. a) On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x,
$f(x) = (x + a)\mathrm{e}^{bx}$.
Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = (bx + ab + 1)\mathrm{e}^{bx}$.

☛ **Solution**:

On pose $u(x) = x + a$ et $v(x) = e^{bx}$
et on a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = be^{bx}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (1)(e^{bx}) + (x + a)(be^{bx}) \\ &= e^{bx} + xbe^{bx} + abe^{bx} \\ &= e^{bx}(bx + ab + 1) \text{ (on factorise par } e^{bx}) \end{aligned}$$

$\boxed{f'(x) = e^{bx}(bx + ab + 1)}$

b) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes des réels a et b.

☛ **Solution**:

$f(0) = (0 + a)\mathrm{e}^{b\times 0} = -4$
$\Longleftrightarrow ae^0 = -4$ *(rappel $e^0 = 1$)*
$\Longleftrightarrow a = -4$

$a = -4$ donc $f'(x) = e^{bx}(bx - 4b + 1)$

$f'(0) = e^{b\times 0}(b \times 0 - 4b + 1) = -1$
$\Longleftrightarrow -4b + 1 = -1$ *(rappel $e^0 = 1$)*
$\Longleftrightarrow -4b = -2$
$\Longleftrightarrow b = \dfrac{-2}{-4}$
$\Longleftrightarrow b = \dfrac{1}{2}$
$\Longleftrightarrow -4b = \dfrac{-1}{e} - 1$

$\boxed{a = -4 \text{ et } b = 0,5 \text{ et } f(x) = (x - 4)e^{0,5x}}$

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = (x - 4)\mathrm{e}^{0,5x}$$

1. Donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x ; en déduire le sens de variation de la fonction f sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

☛ **Solution**:

D'après les questions 2a. et 2b., on a $f'(x) = e^{bx}(bx + ab + 1)$ avec $a = -4$ et $b = 0,5$
donc $f'(x) = e^{0,5x}(0,5x - 2 + 1) = e^{0,5x}(0,5x - 1)$
$e^{0,5x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $0,5x - 1$
$0,5x - 1 > 0 \Longleftrightarrow 0,5x > 1 \Longleftrightarrow x > \dfrac{1}{0,5} \Longleftrightarrow x > 2$
donc $f'(x) > 0$ sur $2; +\infty[$ et $f'(x) < 0$ sur $]-\infty; 2[$

$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty; 2[\text{ et strictement croissante sur } 2; +\infty[}$

2. a) Calculer la dérivée seconde f'' de f et vérifier que pour tout réel x, $f''(x) = 0,25xe^{0,5x}$

☛ **Solution**:

$f'(x) = e^{0,5x}(0,5x - 1)$
On pose $u(x) = e^{0,5x}$ et $v(x) = 0,5x - 1$
et on a $u'(x) = 0,5e^{0,5x}$ et $v'(x) = 0,5$

$$\begin{aligned} f''(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (0,5e^{0,5x})(0,5x - 1) + (e^{0,5x})(0,5) \\ &= 0,25xe^{0,5x} - 0,5e^{0,5x} + 0,5e^{0,5x} \\ &= 0,25xe^{0,5x} \end{aligned}$$

$\boxed{f''(x) = 0,25xe^{0,5x}}$

b) Prouver que le point A est le seul point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

☛ **Solution**:

$e^{0,5x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $0,25x$ donc $f''(x) > 0$ pour $x > 0$ et $f''(x) < 0$ pour $x < 0$
donc $f''(x)$ s'annule et change de signe en $x = 0$

$\boxed{\text{donc A est le point d'inflexion de la courbe } \mathcal{C}}$

3. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = f(x) + x + 4$. On admet que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$

☛ **Solution**:

$g(0) = f(0) + 0 + 4 = -4 + 4 = 0$
g est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$
et $g(0) = 0$ donc $g(x) > 0$ pour $x > 0$
Avec le tableau de variation de g on a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
signe de $g(x)$	$-$	0	$+$

$\boxed{g(x) > 0 \text{ sur }]0; +\infty[\text{ et } g(x) < 0 \text{ sur }]-\infty; 0[}$

b) Déterminer la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à sa tangente $\mathcal{T}$

☛ **Solution**:

La tangente $\mathcal{T}$ a pour équation réduite $y = -x - 4$
et $f(x) - (-x-4) = f(x) + x + 4 = g(x)$
donc d'après la question précédente, on a :
$f(x) - (-x-4) < 0$ sur $]-\infty; 0[$

$$\boxed{\text{donc } \mathcal{C} \text{ est en-dessous de } \mathcal{T} \text{ pour } x < 0}$$

et $f(x) - (-x-4) > 0$ sur $]0; +\infty[$

$$\boxed{\text{donc } \mathcal{C} \text{ est au-dessus de } \mathcal{T} \text{ pour } x > 0}$$