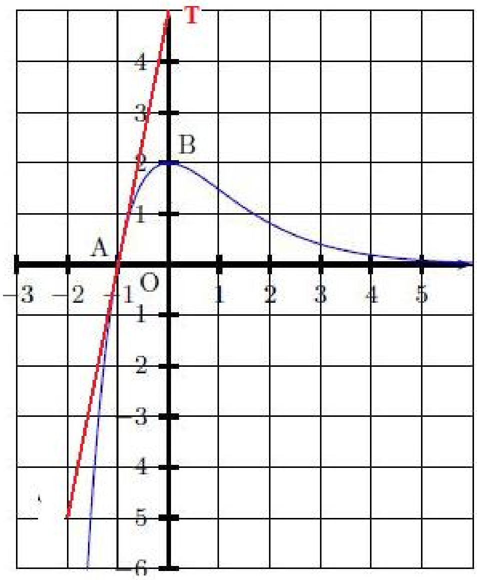
Exercice 1 : composition avec la fonction exponentielle

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a tracé ci-contre sa courbe représentative $(\mathcal{C})$ dans un repère orthonormal.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Les points A$(-1\ ;\ 0)$ et B$(0\,;\,2)$ appartiennent à la courbe $(\mathcal{C})$.
La courbe $(\mathcal{C})$ admet en B une tangente parallèle Ã l'axe des abscisses.

La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$. La fonction f est décroissante et strictement positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.



On définit la fonction g par $g(x) = e^{f(x)} = exp(f(x) = (exp \circ f)(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g.

   On admet pour la suite que g est dérivable sur D_g.
2. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$ et donner les variations de la fonction g.
3. Déterminer $g(0)$ puis $g'(0)$.
4. Déterminer $g(-1)$ puis $g'(-1)$
5. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

Correction

On définit la fonction g par $g(x) = e^{f(x)} = exp(f(x) = (exp \circ f)(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g.

☛ **Solution**:

La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ donc g est définie pour toute valeur de $f(x)$ soit sur $G_g = D_f = \mathbb{R}$

On admet pour la suite que g est dérivable sur D_g.

2. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$ et donner les variations de la fonction g.

☛ **Solution**:

$g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$ (formule $(e^u)' = ue^u$)
$e^{f(x)} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $f'(x)$

Sur $]-\infty; 0[$, f est strictement croissante donc $f'(x) > 0$ donc $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante.

De même, sur $]0; +\infty[$, f est strictement décroissante donc $f'(x) < 0$ donc $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante.

3. Déterminer $g(0)$ puis $g'(0)$.

☛ **Solution**:

$g(0) = e^{f(0)} = e^2$
et
$g'(0) = f'(0)e^{f(0)}$

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 qui est parallèle à l'axe des abscisses soit $f'(0) = 0$

donc $g'(0) = 0e^2 = 0$

4. Déterminer $g(-1)$ puis $g'(-1)$

☛ **Solution**:

$g(-1) = e^{f(-1)} = e^0 = 1$
et
$g'(-1) = f'(-1)e^{f(-1)}$

$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente (AT) à la courbe au point d'abscisse -1 soit $f'(-1) = \dfrac{5}{1} = 5$

donc $g'(-1) = 5 \times 1 = 5$

5. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

☛ **Solution**:

On pose $X = f(x)$
$\lim\limits_{x \to +\infty} X = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$
et $\lim\limits_{X \to 0^+} e^X = e^0 = 1$
donc par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$ (asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$ à la courbe C_g

$\lim\limits_{x \to -\infty} X = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$
et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$
donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ (asymptote d'équation $y = 0$ en $-\infty$ à la courbe C_g

Exercice 2 : Compléments et révisions(composition de f et de la fonction ln)

On définit la fonction h par $h(x) = ln(f(x)) = (ln \circ f)(x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_h de la fonction h.

☛ **Solution**:

ln est définie sur $]0;+\infty[$ donc il faut $f(x) > 0$

Graphiquement, les solutions de l'inéquations $f(x) > 0$ sont les abscisses des points de C_f situés strictement au-dessus de l'axe des abscisses soit $D_h =]-1;+\infty[$.

On admet pour la suite que h est dérivable sur D_h.

2. Exprimer $h'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$ et donner les variations de la fonction g.

☛ **Solution**:

$h'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ et sur D_h, on a $f(x) > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $f'(x)$.
Sur $]-\infty;0[$, f est croissante donc $f'(x) > 0$ donc h est croissante
et sur $]0;+\infty[$, f est décroissante donc $f'(x) < 0$ donc h est décroissante.

3. Déterminer $h(0)$ puis $h'(0)$.

☛ **Solution**:

$g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

donc $h'(0) = \dfrac{f'(0)}{f(0)}$

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 qui est parallèle à l'axe des abscisses soit $f'(0) = 0$

donc $h'(0) = \dfrac{f'(0)}{f(0)} = \dfrac{0}{2} = 0$

4. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} h(x)$.

☛ **Solution**:

On pose $X = f(x)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} X = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$
et $\lim\limits_{X\to 0^+} lnX = -\infty$
donc par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} X = \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = 0^+$ car l'axe des abscisses est asymptote à la courbe en $+\infty$
et $\lim\limits_{X\to 0^+} lnX = -\infty$
donc par composition $\lim\limits_{x\to-1^+} h(x) = -\infty$ (asymptote d'équation $x = -1$ à la courbe C_h)