1 Fonctions polynômes du second degré (rappels)

1.1 Définition

Définition : fonction polynôme du second degré
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme de degré 2 s'il existe trois réels a, b et c avec $a \neq 0$ tels que pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$

Remarque :
La forme donnée dans la définition est la forme développée mais $f(x)$ peut s'écrire de différentes façons, notamment sous forme factorisée ($f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec x_1 et x_2 réels)quand cela est possible ou sous forme canonique (voir sous section 2)

Exemple 1 : Identification des coefficients
Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes et déterminer s'il s'agit d'une fonction polynôme de degré 2 (si oui, donner la valeurs des réels a, b et c)

1. $f(x) = (x - 2)^2 + 3$
2. $g(x) = 3x^2 - x + 1$
3. $h(x) = (x - 2)(x + 1) - x^2$

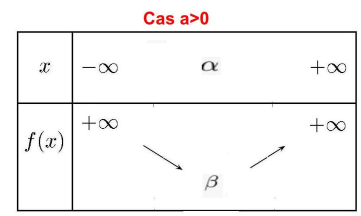
1.2 Variations et courbe représentative

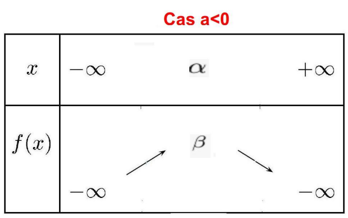
Soit la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

La courbe représentative de f est une **parabole** dont le sommet a pour coordonnées $(\alpha; \beta)$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

On peut alors écrire f sous forme **canonique :** $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

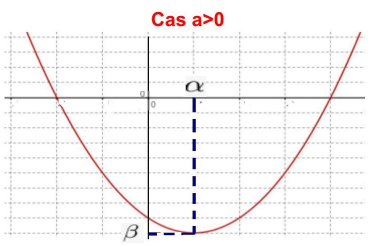
Tableau de variation :

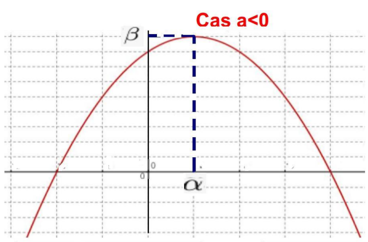




Remarque : Pour étudier les variations de f, on peut aussi étudier le signe de sa dérivée $f'(x) = 2ax + b$......

Courbe représentative :





Exemple 2 : Avec la fonction de l'exemple 2
Rappel : f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$
Donner le tableau de variation de f et « l'allure »de la courbe représentative de f puis sa forme canonique.

2 Racines et signe du polynôme du second degré

2.1 Discriminant

Définition : Discriminant d'une fonction polynôme de degré 2
Le nombre réel noté $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé discriminant de f

Exemple 3 : Calcul du discriminant
Avec la fonction de l'exemple 2, calculer le discriminant de f.
Rappel : f est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$

2.2 Solutions de l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

Il y a trois cas possibles selon le signe de Δ :

- **Cas $\Delta > 0$** et l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions
  $x_1 = \alpha + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
  et
  $x_2 = \alpha - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
  On a alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (forme factorisée de f)
- **Cas $\Delta = 0$**
  On alors $f(x) = a(x - \alpha)^2$
  donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $x_1 = \alpha = \dfrac{-b}{2a}$
- **Cas $\Delta < 0$**
  l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

Exemple 4 :Résolution $f(x) = 2x^2 - 8x + 3 = 0$ (fonction de l'exemple3)
Déterminer les solutions de $2x^2 - 8x + 3 = 0$

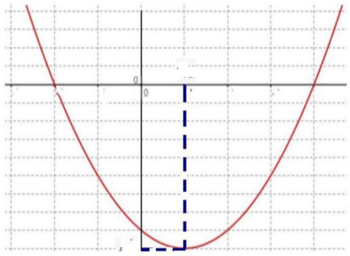
Exemple 5 :Résolution d'équations du second degré
(voir aussi fiche méthode-aide mémoire second degré)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $3x^2 - 2x - 1 = 0$
2. $4x^2 - 3x = 0$
3. $9x^2 - 5 = 0$

2.3 Signe du polynôme du second degré

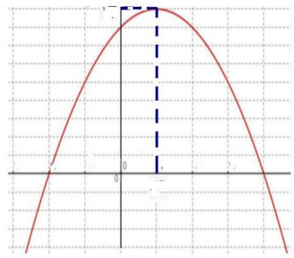
Cas où $\Delta > 0$ et le polynôme admet deux racines x_1 et x_2 (avec $x_1 < x_2$)

Cas a>0



x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
ax^2+bx+c	

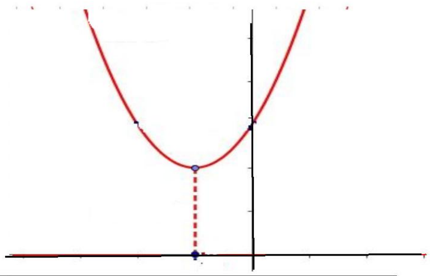
Cas a<0



x	$-\infty$ x_1 x_2 $+\infty$
ax^2+bx+c	

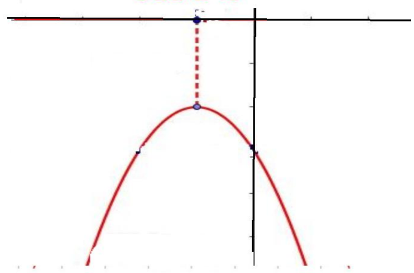
Cas où $\Delta < 0$ et le polynôme n'admet pas de racine.

Cas a>0



x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	

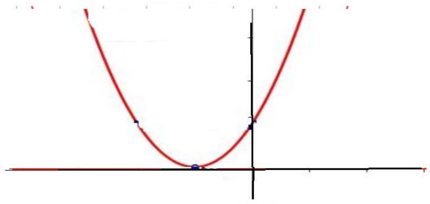
Cas a<0



x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	

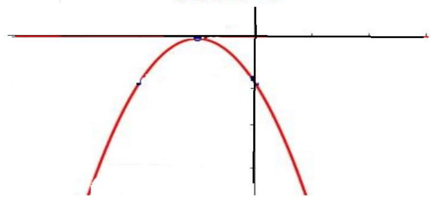
Cas où $\Delta = 0$ et le polynôme admet une racine $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$.

Cas a>0



x	$-\infty$ x_1 $+\infty$
ax^2+bx+c	

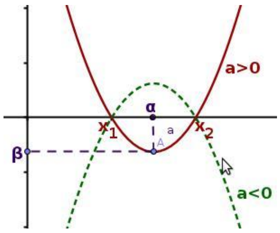
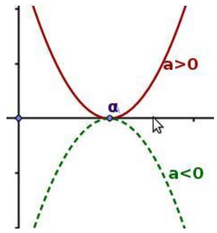
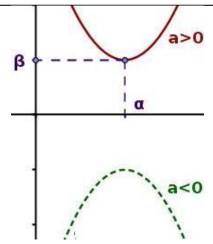
Cas a<0



x	$-\infty$ x_1 $+\infty$
ax^2+bx+c	

2.4 Conclusion et résumé

$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$
$\Delta = b^2 - 4ac$

<table>
<tr><th>$\Delta > 0$</th><th>$\Delta = 0$</th><th>$\Delta < 0$</th></tr>
<tr><td>Deux racines
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$</td><td>une racine
$x_1 = \dfrac{-b}{2a}$</td><td>pas de racine</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de -a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>

Exemple 6 : étude du signe
Etudier le signe de $3x^2 - 2x - 1 = 0$ (exemple 5.1.)

3 Compléments

3.1 Somme et produit des racines (cas $\Delta > 0$)

Si $\Delta > 0$, il y a deux racines $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 + x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
donc $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$
et
$x_1 \times x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$= \dfrac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \dfrac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$
donc $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

Cela permet de contrôler les racines obtenues par exemple ou de trouver la seconde racine quand l'une des deux est « simple »(exemple 5 question1)

3.2 Calculatrice

La calculatrice graphique permet de résoudre des équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
Menu : equ
pol : touche F_1
deg 2 : touche F_1
Entrer les coefficients a, b et c puis solve.
Par exemple avec la l'équation 1 de l'exemple 5 :$3x^2 - 2x - 1 = 0$ Entrer les coefficients $a = 3$, $b = -2$ et $c = -1$ puis résoudre.
Rappel : $S = \left\{\dfrac{-1}{3}; 1\right\}$
Attention, la calculatrice ne permet pas d'avoir la valeur exacte des racines