Table des matières

WWW.MATHS-LYCEE.FR
WWW.MATHS-LYCEE.FR
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle

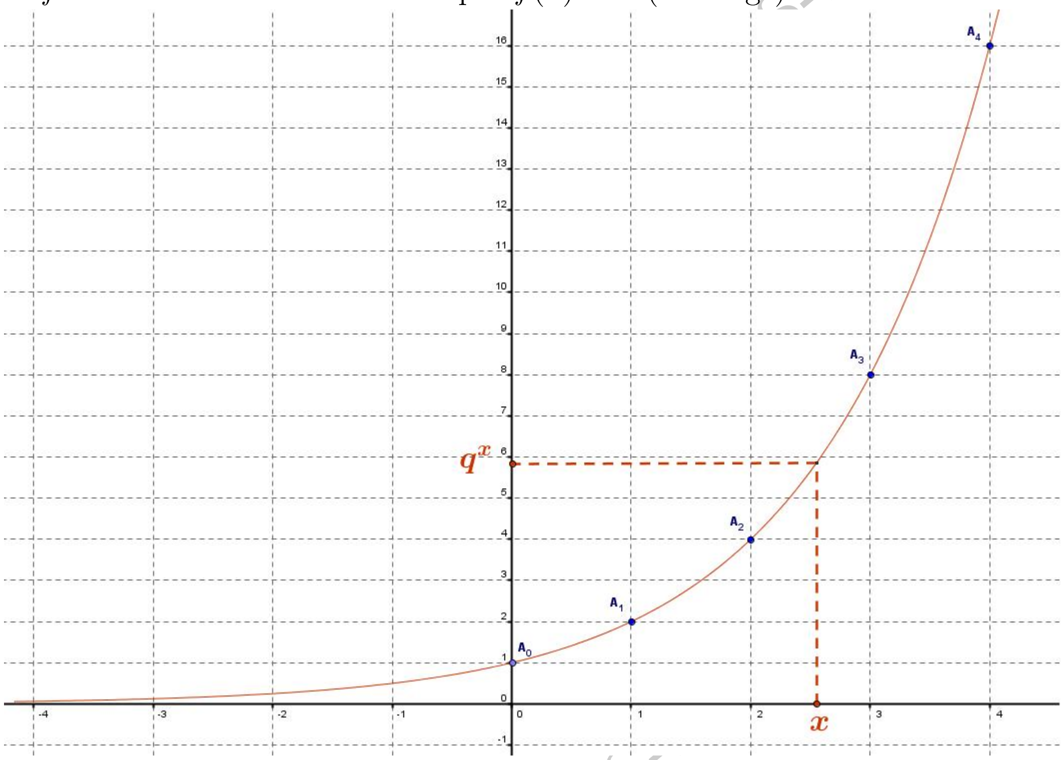
1 Fonction exponentielle de base q

1.1 Définition

Définition(et propriété) :Fonction $x \longmapsto q^x$ avec $q > 0$
q est un réel strictement positif.
On considère la suite géométrique (u_n) de raison q et premier terme $u_0 = 1$.
La fonction exponentielle de base q est le prolongement continu de cette suite géométrique .
Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = q^x$.

On peut représenter graphiquement les termes de cette suite par les points $A_n(n; u_n)$ (voir figure (en bleu). (exemple de graphique avec $q = 2$)

et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^x$(en rouge)



Remarque

Sur le graphique, la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et premier terme $u_0 = 1$

Cette suite est strictement croissante car $u_0 > 0$ et $q > 1$ donc f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^x$ est strictement croissante.

1.2 sens de variation

La suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ (donc $u_0 > 0$) et de raison q avec $q > 0$ est

- strictement croissante pour $q > 1$
- strictement décroissante pour $q < 1$

WWW.MATHS-LYCEE.FR
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle

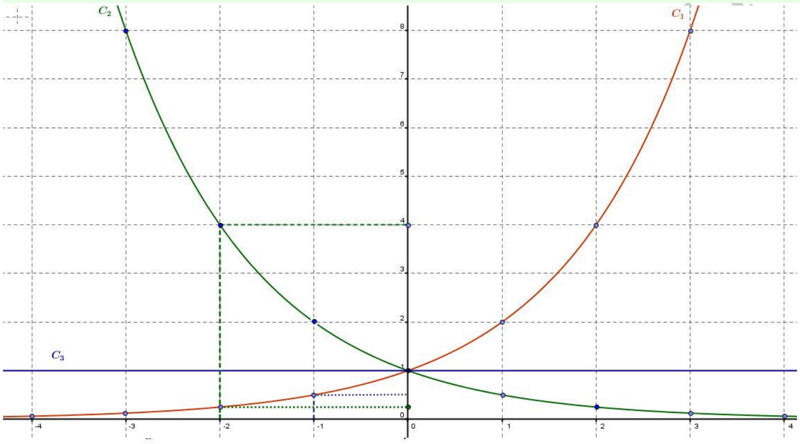
On admettra donc que le prolongement continu de la fonction exponentielle de base q avec $q > 0$ soit $x \longmapsto q^x$ est :

- strictement croissante pour $q > 1$
- strictement décroissante pour $q < 1$
- constante pour $q = 1$ ($x \longmapsto 1^x = 1$)

➢Application ex 323

Exemple 1 : Allure de la représentation graphique dans les différents cas

Représenter graphiquement les fonctions suivantes dans le même repère :
$f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^x}$ et $f_3(x) = 1^x$



1.3 relation fonctionnelle et propriétés

Théorème : (admis)
Soit f une fonction exponentielle de base q ($q > 0$).
Pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$
On a alors $q^{x+y} = q^x \times q^y$

Conséquences :

- En prenant $x = 0$, on a :

  pour tout réel y : $q^{0+y} = q^y = q^0 \times q^y$

  $q^0 = 1$

- En prenant $y = -x$, on a pour tout réel x :

  $q^{x-x} = q^0 = 1 = q^x \times q^{-x}$

  donc $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$

WWW.MATHS-LYCEE.FR
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle

❑ Pour tout réel x et entier relatif n, on a $(q^x)^n = q^x \times q^x ..... \times q^x = q^{x+x+x....+x}$

donc $(q^x)^n = q^{n\times x}$

❑ Pour tout entier naturel n, on a $(q^{\frac{1}{n}})^n = q^1 = q$

donc $q^{\frac{1}{n}}$ **est la racine** $n^{\text{ième}}$ **de** q

➢Application ex 324

En conclusion, les règles de calculs vues en troisième sur les exposants sont valables pour les fonctions exponentielles de base q.

Remarque

Pour $n = 2$, on a avec la dernière expression $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$ (racine $2^{\text{ième}}$ de q soit racine carrée de q

❒ **Exemple 2 : simplification**

Simplifier : $2^3 2^{1,5}$, $3^{2x-0,5}$ $(x \in \mathbb{R})$, $4^{\frac{1}{2}}$

☛ **Solution**:

❑ $2^3 2^{1,5} = 2^{3+1,5} = 2^{4,5}$

❑ $3^{2x-0,5} = 3^{2x} \times 3^{-0,5} = (3^2)^x \times \dfrac{1}{3^{0,5}} = \dfrac{9^x}{\sqrt{3}}$

❑ $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

2 Exponentielle de base e

2.1 Définition

Définition : Fonction exponentielle de base e
La fonction exponentielle de base e notée **exp** est la fonction (unique) telle que $f'(0) = 1$
On note $exp : x \longmapsto e^x$ avec $exp'(0) = 1$
Le nombre e est limage de 1 par la fonction exp soit $exp(1) = e$

Avec la calculatrice, on a $e^0 \approx 2,718$ (touche exp)

On a donc d'après ce qui a été vu dans la section 1 :

$exp(x) \times exp(y = exp(x+y)$ soit $e^x e^y = e^{x+y}$

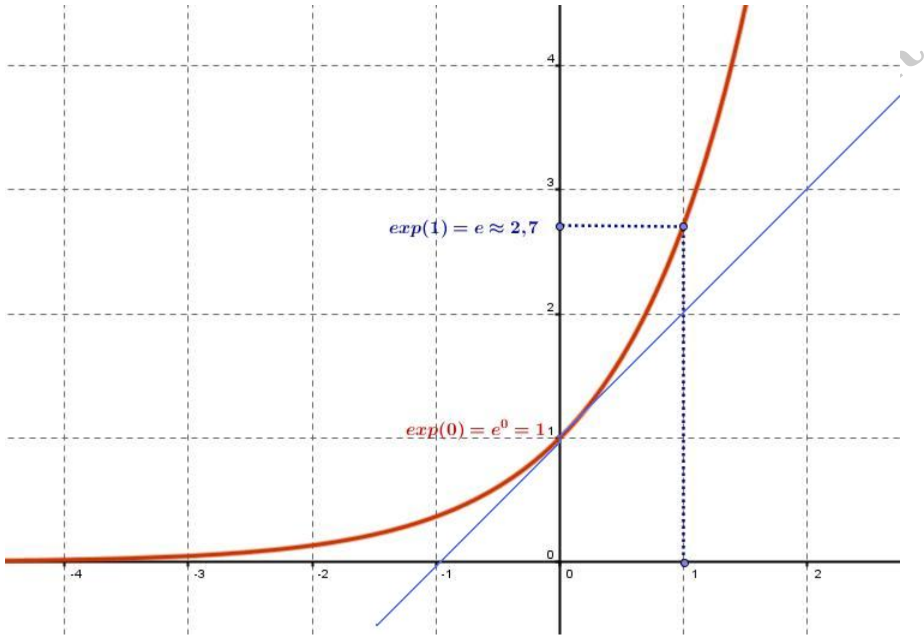
$e > 1$ donc la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

WWW.MATHS-LYCEE.FR
WWW.MATHS-LYCEE.FR
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle

2.2 Représentation graphique

$exp'(0) = 1$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction exp en $x = 0$

Avec la calculatrice MENU TABLE puis Y1=exp(x). (paramétrer le tableau de valeurs dans SET)



Graphiquement, il semble que la fonction exponentielle soit convexe.

2.3 Dérivée et convexité

Théorème : Fonction dérivée (admis)
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(exp(x))' = exp(x)$

Conséquences :

$e^x > 0$ donc $exp(x)' > 0$ et on retrouve le fait que exp est strictement croissante.

$(exp(x))'' = (exp(x))' = exp(x)$

La dérivée seconde est strictement positive donc exp' est strictement croissante et exp est donc **convexe**.

➢Application ex 331 ➢Application ex 335

2.4 Equations et inéquations

Théorème
La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc pour tous réels a et b :
$e^a = e^b \iff a = b$
$e^a > e^b \iff a > b$

MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle
WWW.MATHS-LYCEE.FR
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle

❐ **Exemple 3 : Equations**

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{2x-1}=e^2$ et $e^{3-x}>1$

➢Application ex 343 ➢Application ex 345

☛ **Solution**:

$e^{2x-1}=e^2 \iff 2x-1=2 \iff 2x=3 \iff x=\dfrac{3}{2}$

$e^{3-x}>1 \iff e^{3-x}>e^0 \iff 3-x>0 \iff -x>-3 \iff x<3$

$S=]-\infty;3[$

3 Fonction e^u

3.1 Dérivée de e^u

Pour toute la suite u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Théorème : dérivée de e^u (admis)

La fonction f définie sur I par $f(x)=e^{u(x)}$ est dérivable sur I
et $f'(x)=(e^{u(x)})'=u'(x)e^{u(x)}$

➢Application ex 333

❐ **Exemple 4 : Calcul de dérivées**

Calculer la dérivée des fonctions suivantes définies et dérivables sur I
$f(x)=e^{3-2x}$ et I$=\mathbb{R}$
$g(x)=2e^{\frac{1}{2x-4}}$ et I$=]2;+\infty[$

☛ **Solution**:

$f(x)=e^{3-2x}$ et I$=\mathbb{R}$

On a ici $u(x)=3-2x$ et $u'(x)=-2$

donc $f'(x)=-2e^{3-2x}$

$g(x)=2e^{\frac{1}{2x-4}}$ et I$=]2;+\infty[$

On a ici $u(x)=\dfrac{1}{2x-4}$ et $u'(x)=\dfrac{-2}{(2x-4)^2}$ (formule $(\frac{1}{v})'=\dfrac{-v'}{v^2}$

donc $g'(x)=2\dfrac{-2}{(2x-4)^2}e^{\frac{1}{2x-4}}=\dfrac{-4}{(2x-4)^2}e^{\frac{1}{2x-4}}$

WWW.MATHS-LYCEE.FR
WWW.MATHS-LYCEE.FR
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle

3.2 Variations de e^u

$e^{u(x)} > 0$ donc $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ est du signe de $u'(x)$

Si u est strictement croissante, $u'(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante.

Propriété : variations de e^u
u et e^u on le même sens de variation sur I

Remarque

⚠, $(e^x)' = e^x$

mais pour dériver la fonction $x \longmapsto e^{-x}$, il faut poser $u(x) = -x$ et on a $u'(x) = -1$

donc $(e^{-x})' = -e^{-x}$

3.3 Exemples d'étude de fonctions

❒ **Exemple 5 : Cas 1 :** $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$

On considère la fonction f définie sur $D_f = [0; 10]$ par $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{-x}$
Dresser le tableau de variation de f

☛ **Solution**:

❑ On pose $u(x) = x^2 - 3x + 1$ et $v(x) = e^{-x}$

On a alors $u'(x) = 2x - 3$ et $v'(x) = (-x)'e^{-x} = -e^{-x}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\ &= (2x-3)e^{-x} + (x^2 - 3x + 1)(-e^{-x})\\ &= e^{-x}(2x - 3 - (x^2 - 3x + 1)) = e^{-x}(-x^2 + 5x - 4)\end{aligned}$$

❑ Etude du signe de $f'(x)$

$e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 5x - 4$

Racines de $-x^2 + 5x - 4$:

$\Delta = 25 - 4 \times (-1) \times (-4) = 9$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-3}{-2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+3}{-2} = 1$$

$-x^2 + 5x - 4$ est du signe de $a = -1$ coefficient de x^2 à "l'extérieur" des racines

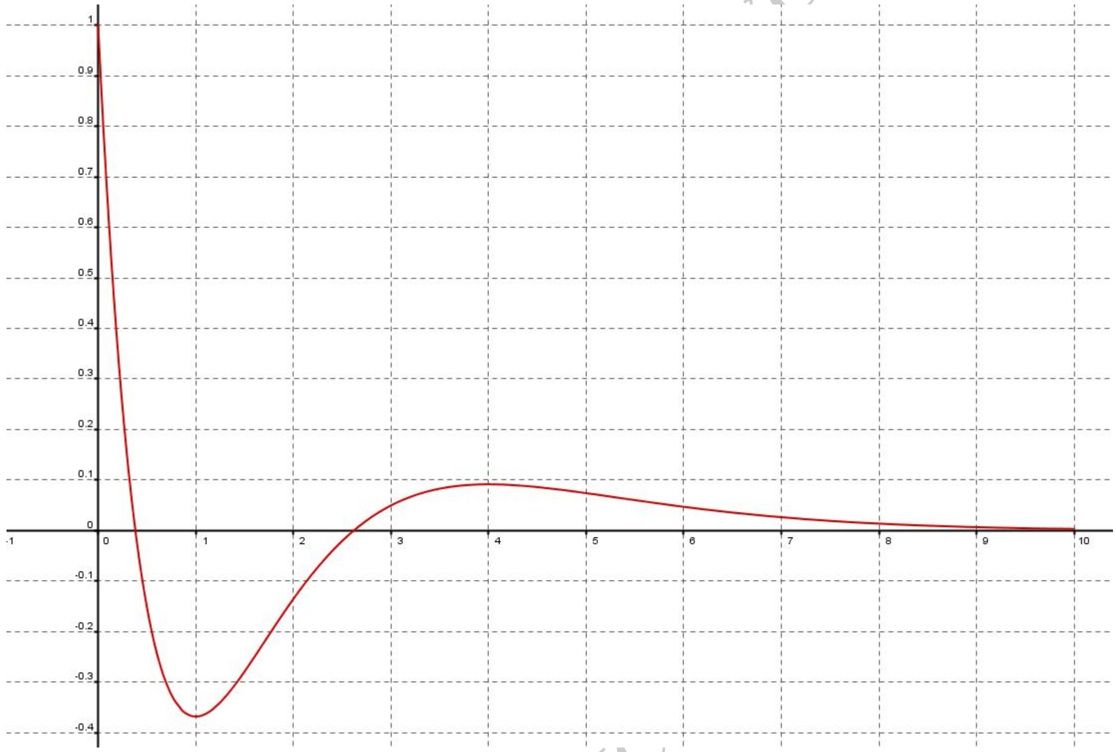
WWW.MATHS-LYCEE.FR
WWW.MATHS-LYCEE.FR
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle

x	0		1		4		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$	$f(10)$

avec $f(0) = (0^2 - 3 \times 0 + 1)e^{-0} = 1$, $f(1) = (1^2 - 3 \times 1 + 1)e^{-1} = \dfrac{-1}{e}$

$f(4) = (4^2 - 3 \times 4 + 1)e^{-4} = \dfrac{5}{e^4}$ et $f(10) = (10^2 - 3 \times 10 + 1)e^{-10} = \dfrac{71}{e^{10}}$

❑ Courbe représentative de f :



❒ **Exemple 6 : Cas 2 :** $f(x) = xe^{-x+1}$

On considère la fonction f définie sur $D_f = [0; 10]$ par $f(x) = xe^{-x+1}$
Dresser le tableau de variation de f
Etudier la convexité de f

☛ **Solution**:

❑ On pose $u(x) = x$ et $v(x) = e^{-x+1}$

On a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = (-x+1)'e^{-x+1} = -e^{-x+1}$

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$
$$= 1e^{-x+1} + (x)(-e^{-x+1})$$
$$= e^{-x+1}(1-x)$$

WWW.MATHS-LYCEE.FR
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle

❑ Etude du signe de $f'(x)$

$e^{-x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x+1$

$-x+1 > 0 \iff -x > -1 \iff x < 1$

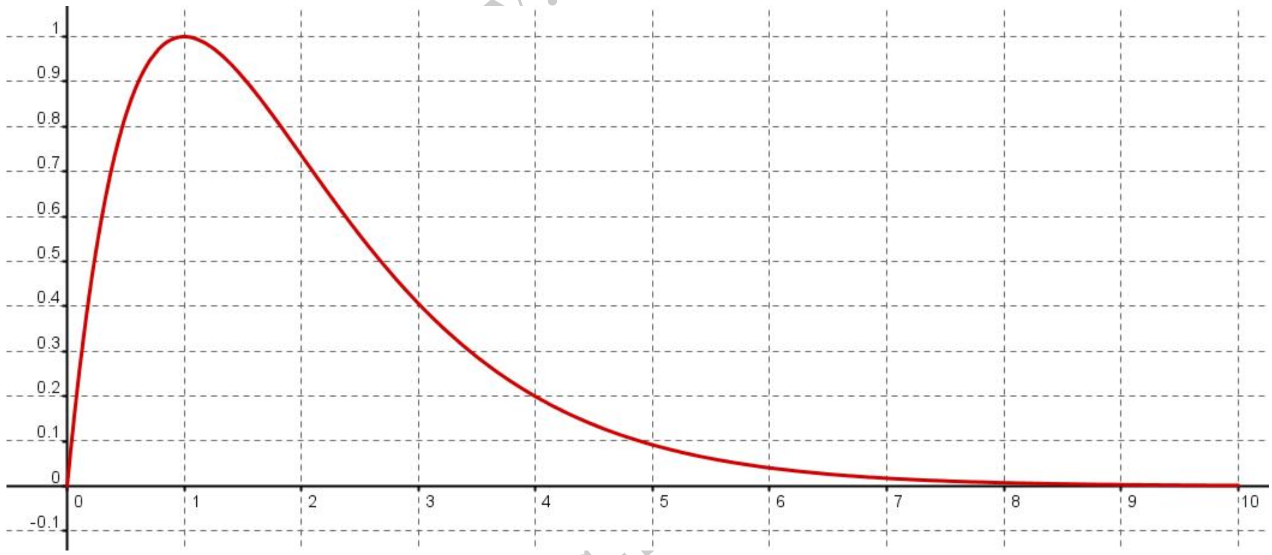
❑ .

x	0		1		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(10)$

avec $f(0) = 0e^{-0+1} = 0,\ f(1) = 1e^{-1+1} = e^0 = 1$

$f(10) = 10e^{-10+1} = 10e^{-9} = \dfrac{10}{e^9}$

❑ Courbe représentative de f :



❑ Calcul de $f''(x)$

$f'(x) = e^{-x+1}(1-x)$

On pose $u_1(x) = 1-x$ et $v_1(x) = e^{-x+1}$

On a alors $u_1'(x) = -1$ et $v_1'(x) = (-x+1)'e^{-x+1} = -e^{-x+1}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= u_1'(x)v_1(x) + u_1(x)v_1'(x) \\ &= -1e^{-x+1} + (1-x)(-e^{-x+1}) \\ &= e^{-x+1}(-1-1+x) \\ &= e^{-x+1}(x-2) \end{aligned}$$

WWW.MATHS-LYCEE.FR
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle

❑ Signe de $f''(x)$

$e^{-x+1} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x - 2$

$x - 2 > 0 \iff x > 2$

x	0		2		10
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		f est concave		f est convexe	

La courbe représentative de f admet un point d'inflexion au point de coordonnées $(2; f(2))$

WWW.MATHS-LYCEE.FR
WWW.MATHS-LYCEE.FR
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle
MATHS-LYCEE.FR-mathématiques en Terminale ES –chapitre 3 : Exponentielle