

Exercice 1 : composition avec la fonction exponentielle

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

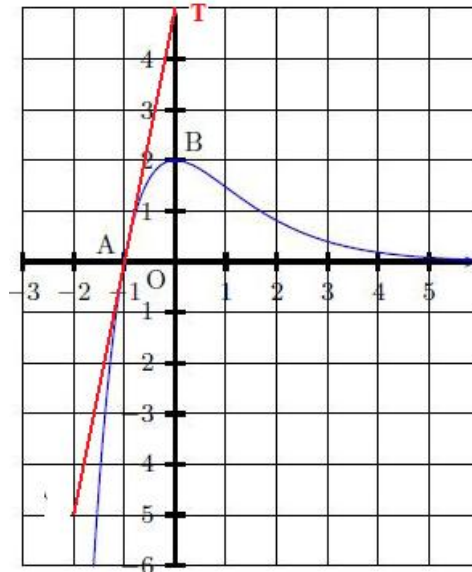
On a tracé ci-contre sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans un repère orthonormal.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur \mathbb{R} .

Les points $A(-1 ; 0)$ et $B(0 ; 2)$ appartiennent à la courbe (\mathcal{C}).

La courbe (\mathcal{C}) admet en B une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

La fonction f est croissante sur l'intervalle $] -\infty ; 0]$. La fonction f est décroissante et strictement positive sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.



On définit la fonction g par $g(x) = e^{f(x)} = \exp(f(x))$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g .

On admet pour la suite que g est dérivable sur D_g .

2. Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$ et donner les variations de la fonction g .
3. Déterminer $g(0)$ puis $g'(0)$.
4. Déterminer $g(-1)$ puis $g'(-1)$.

Correction

On définit la fonction g par $g(x) = e^{f(x)} = \exp(f(x)) = (\exp \circ f)(x)$.

- Déterminer l'ensemble de définition D_g de la fonction g .

• **Solution:**

La fonction exponentielle est définie sur \mathbb{R} donc g est définie pour toute valeur de $f(x)$ soit sur $G_g = D_f = \mathbb{R}$

On admet pour la suite que g est dérivable sur D_g .

- Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f'(x)$ et donner les variations de la fonction g .

• **Solution:**

$$g'(x) = f'(x)e^{f(x)} \text{ (formule } (e^u)' = ue^u)$$

$$e^{f(x)} > 0 \text{ donc } g'(x) \text{ est du signe de } f'(x)$$

Sur $] -\infty; 0[$, f est strictement croissante donc $f'(x) > 0$ donc $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante.

De même, sur $]0; +\infty[$, f est strictement décroissante donc $f'(x) < 0$ donc $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante.

- Déterminer $g(0)$ puis $g'(0)$.

• **Solution:**

$$g(0) = e^{f(0)} = e^2$$

et

$$g'(0) = f'(0)e^{f(0)}$$

$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 qui est parallèle à l'axe des abscisses soit $f'(0) = 0$

$$\text{donc } g'(0) = 0e^2 = 0$$

- Déterminer $g(-1)$ puis $g'(-1)$

• **Solution:**

$$g(-1) = e^{f(-1)} = e^0 = 1$$

et

$$g'(-1) = f'(-1)e^{f(-1)}$$

$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente (AT) à la courbe au point d'abscisse -1 soit $f'(-1) =$

$$\frac{5}{1} = 5$$

$$\text{donc } g'(-1) = 5 \times 1 = 5$$