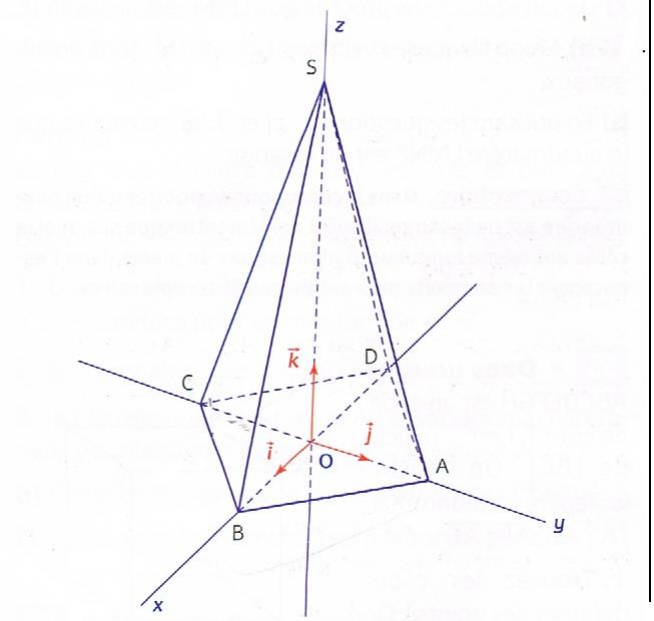
Exercice bac spécialité : pyramide régulière

BAC Pyramide régulière

La figure donnée ci-dessous représente une pyramide SABCD de sommet S.



On donne les coordonnées des points suivants dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

S(0 ; 0 ; 5) A(0 ; 2 ; 0) B(2 ; 0 ; 0) C(0 ; −2 ; 0)
D(−2 ; 0 ; 0) M(0 ; 1 ; 0)

1. Démontrez que la base ABCD de la pyramide est un carré.

2. a) Sans aucun calcul, donnez une équation du plan contenant les points A, B, C et D.

b) Déterminez une équation du plan (ABS).

3. a) Vérifiez que le plan (BCS) admet pour équation : $5x - 5y + 2z = 10$.

b) Placez le point N(1 ; −1 ; 1). Est-il dans le plan (BCS) ?

4. a) Déterminez une équation du plan $\mathscr{R}$ parallèle au plan (BCS) passant par le point M.

b) Dessinez les traces du plan $\mathscr{R}$ sur les plans (xOy) (yOz), (xOz).

1. $B \in (Ox)$ et $D \in (Ox)$ et $x_B = 2 = -x_D$ donc O milieu de $[BD]$

$A \in (Ox)$ et $C \in (Ox)$ et $y_A = 2 = -y_C$ donc O milieu de $[AC]$

De plus le repère est orthonormé donc $Ox) \perp (Oy)$ donc $(AC) \perp (BD)$

donc ABCD est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leurs milieux, sont de même longueur et perpendiculaire donc ABCD est un carré.

Autre méthode :

Dans un repère orthonormé, on peut aussi calculer les distances AB, BC, CD et DA pour montrer que ABCD est un losange puis AC pour montrer que $AB^2 + BC^2 = AC^2$

Rappel : $AB = \sqrt{(x_b - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

2. a) $z_A = z_B = z_C = z_D$ donc le plan ABCD est confondu avec le plan (xOy) d'équation $z = 0$

b) Le plan ABS ne contient pas le point $O(0;0;0)$ donc admet une équation de la forme $ax + by + cz = 0$.

$A \in (ABS) \iff 2b = 1 \iff b = \dfrac{1}{2}$

$B \in (ABS) \iff 2a = 1 \iff a = \dfrac{1}{2}$

$S \in (ABS) \iff 5c = 1 \iff c = \dfrac{1}{5}$

donc (ABS) admet pour équation $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{5}z = 1 \iff 5x + 5y + 2z = 10$

3. a) Deux méthodes possibles :

- Soit reprendre la même méthode que la question précédente avec les points B, C et S
- Soit vérifier que le plan définit par cette équation contient bien les points B, C et S

On note (P) le plan d'équation $5x - 5y + 2z = 10$, vérifions que les points B, C et S appartiennent à ce plan :

$5x_B - 5y_B + 2z_B = 10$ donc $B \in (P)$

$5x_C - 5y_C + 2z_C = -5 \times (-2) = 10$ donc $C \in (P)$

$5x_S - 5y_S + 2z_S = 10$ donc $S \in (P)$

donc le plan (BCS) a pour équation $5x - 5y + 2z = 10$.

b) Voir figure ci-dessous.

$5x_N - 5y_N + 2z_N = 5 + 5 + 2 = 12 \neq 10$ donc $S \notin (BCS)$

4. a) Le plan (R) est parallèle au plan (BCS) donc admet une équation de la forme $5x - 5y + 2z = d$ avec $d \in \mathbb{R}$

De plus $M(0;1;0) \in (R) \iff 5x_M - 5y_M + 2z_M = d \iff -5 = d$

donc (R) admet pour équation $5x - 5y + 2z = -5$

b) A' point d'intersection du plan (R) et de l'axe (Ox) : $y_{A'} = z_{A'} = 0$ donc $x_{A'} = -1$ $(5x_{A'} = -5)$

B' point d'intersection du plan (R) et de l'axe (Ox) : $x_{B'} = z_{B'} = 0$ donc $y_{B'} = 1$ $(-5x_{B'} = -5)$

C' point d'intersection du plan (R) et de l'axe (Ox) : $y_{C'} = x_{C'} = 0$ donc $z_{C'} = \dfrac{-5}{2}$ $(2z_{C'} = -5)$

Voir figure (tracé en vert)

