On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_{n+1} = 3u_n - 4$ et $u_0 = 3$

1. On pose $v_n = u_n - 2$ pour tout entier naturel n.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
On précisera son premier terme et sa raison.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

2. Exprimer u_n en fonction de n

3. Etudier les variations de la suite (u_n).

4. La suite (u_n) est-elle convergente ?

5. Exprimer la somme $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n

Correction

1. On pose $v_n = u_n - 2$ pour tout entier naturel n.

a)
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= 3u_n - 4 - 2 \\ &= 3u_n - 6 \\ &= 3(u_n - 2) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$
donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$ et raison $q = 3$.

b) $v_n = v_0 \times q^n = 3^n$

2. $v_n = u_n - 2 \Longleftrightarrow u_n = v_n + 2 = 3^n + 2$

3. $u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} + 2 - (3^n + 2) = 3^{n+1} - 3^n = 3^n(3 - 1) = 2 \times 3^n$
donc $u_{n+1} - u_n > 0$ donc (u_n) est une suite strictement croissante.

4. (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 > 0$ et de raison $q > 1$
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
et par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

5. $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$
$= v_0 + 2 + v_1 + 2 + ... + v_n + 2$
$= 2 \times (n + 1) + v_0 + v_1 + ... v_n$

or (v_n) est une géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et raison $q = 3$

et $v_0 + v_1 + ... v_n = v_0 \left(\dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} \right)$

donc $v_0 + v_1 + ... v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = \dfrac{1 - 3^{n+1}}{-2} = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$

donc $S_n = 2(n + 1) + \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$