# TES spécialité : Exercices sur les suites et graphes probabilistes

## Exercice 1

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».
Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,
- 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.
On désigne par :
- $f_n$ le pourcentage de fumeurs à la génération de rang $n$,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang $n$, où $n$ est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.
On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

**1.** Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.

**2.** Justifier l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times \text{ A où A désigne la matrice : } \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

**3.** Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.

**4.** Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.

**5.** Montrer que : pour tout entier naturel $n$, $f_{n+1} = 0,5 f_n + 0,1$.

**6.** On pose, pour tout entier naturel $n$, $u_n = f_n - 0,2$.

a) Montrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Donner l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.

d) Déterminer la limite de la suite $(f_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

## Exercice 2

Au cours de la première semaine de l'année scolaire, un professeur propose aux élèves de sa classe le choix entre deux sorties pédagogiques une sortie A et une sortie B.
20 % des élèves de la classe sont favorables à la sortie A et tous les autres élèves sont favorables à la sortie B.
Les arguments des uns et des autres font évoluer cette répartition en cours d'année.
Ainsi 30 % des élèves favorables à la sortie A et 20 % des élèves favorables à la sortie B changent d'avis la semaine suivante.
On note :
$a_n$ la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la semaine $n$ ;
$b_n$ la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie B la semaine $n$ ;
$P_n$ la matrice $(a_n \ ; \ b_n)$ traduisant l'état probabiliste la semaine $n$.

**1.** Déterminer l'état initial $P_1$.

**2.** Représenter la situation par un graphe probabiliste.

**3.** En déduire que $P_{n+1} = P_n \times \text{M}$ où M est la matrice $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

**4.** Déterminer l'état probabiliste $P_3$ et en déduire la probabilité qu'un élève soit favorable à la sortie A la troisième semaine.

**5.** Déterminer le réel $x$ tel que $(x \ ; 1 - x) \times \text{M} = (x \ ; \ 1 - x)$.
On admet que la suite $(a_n)$ est croissante. La sortie A finira-t-elle par être préférée à la sortie B ?

## Exercice 3

Mademoiselle Z travaille dans une société spécialisée dans la vente par téléphone. Chaque jour, elle doit appeler une liste de clients pour leur proposer un produit particulier. Après avoir observé un grand nombre d'appels de Mademoiselle Z, on peut faire l'hypothèse suivante :

- si un client contacté répond favorablement (situation A), cela donne de l'assurance à Mademoiselle Z et elle arrive à convaincre le client suivant une fois sur deux ;
- si le client contacté ne répond pas favorablement (situation B), Mademoiselle Z se décourage et n'arrive à convaincre le client suivant qu'une fois sur cinq.

**1.** a) Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

b) Écrire la matrice de transition $M$ de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

**2.** Ce lundi, Mademoiselle Z est en forme et elle a convaincu le premier client d'acheter le produit proposé. La matrice ligne décrivant l'état initial au premier appel est donc $P_0 = (1\ ;\ 0)$. Donner la matrice ligne $P_1$ exprimant l'état probabiliste au deuxième appel.

**3.** On donne la matrice $M^5 = \begin{pmatrix} 0{,}287\,45 & 0{,}712\,55 \\ 0{,}285\,02 & 0{,}714\,98 \end{pmatrix}$

a) Calculer le produit $P_0M^5$. En déduire la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client ce lundi.

b) Quelle aurait été la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client si elle n'avait pas convaincu le premier ?

**4.** Déterminer l'état stable du système. Comment peut-on l'interpréter ?

## Exercice 4

Le 1$^{\text{er}}$ janvier 2005, une grande entreprise compte 1 500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif du 1$^{\text{er}}$ janvier partira à la retraite au cours de l'année. Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Pour tout entier naturel $n$, on appelle $u_n$ le nombre d'employés de l'entreprise le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $(2005 + n)$.

**1.** a) Calculer $u_0$, $u_1$ et $u_2$.
La suite $u$ de terme général $u_n$ est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier les réponses.

b) Expliquer ensuite pourquoi on a, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.

**2.** Pour tout entier naturel $n$, on pose : $v_n = u_n - 1\,000$.

a) Démontrer que la suite $v$ de terme général $v_n$ est géométrique. Préciser sa raison.

b) Exprimer $v_n$ en fonction de $n$.
En déduire que pour tout entier naturel $n$, $u_n = 500 \times 0,9^n + 1\,000$.

c) Déterminer la limite de la suite $u$.

**3.** Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n = -50 \times 0,9^n$.
En déduire le sens de variation de la suite $u$.

**4.** Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2005, l'entreprise compte un sur-effectif de 300 employés. À partir de quelle année, le contexte restant le même, l'entreprise ne sera -t-elle plus en sur-effectif ?

## Exercice 5

Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2000, la population d'une ville se répartit également entre locataires et propriétaires. La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour raisons familiales ou professionnelles, 10 % des propriétaires deviennent locataires tandis que 20 % des locataires deviennent propriétaires.

**1.** On désigne par $p_n$ la probabilité qu'un habitant de la ville choisi au hasard, soit propriétaire au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2000+$n$ ($n$ entier supérieur ou égal  0), et par $l_n$, la probabilité qu'il soit locataire.
La matrice $P_0 = (0,5 \quad 0,5)$ traduit l'état probabiliste initial et la matrice $P_n = (p_n \quad l_n)$ (avec, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $p_n + l_n = 1$) l'état probabiliste après $n$ années.

a) Représenter la situation  l'aide d'un graphe probabiliste et en déduire que ce graphe a pour matrice de transition $\text{M} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

b) Calculer l'état probabiliste $P_1$.

c) Déterminer l'état stable du graphe. Que peut-on en conclure pour la population de cette ville ?

**2.** À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times \text{M}$, démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2$.

**3.** On considère la suite $(u_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.

a) Démontrer que la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $0,7$.

b) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ et démontrer que $p_n = -\dfrac{1}{6} \times 0,7^n + \dfrac{2}{3}$.

c) Calculer la limite de la suite $(p_n)$ et retrouver le résultat de la question 1. c.