Table des matières

1 Rappel formules suites arithmétiques et géométriques

1.1 Suites arithmétiques

Une suite est arithmétique si on ajoute toujours le même nombre réel à chaque terme de la suite pour obtenir le terme suivant.

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r

- $u_{n+1} = u_n + r$ (définition par récurrence)
- $u_n = u_0 + nr$ (forme explicite)
- si le premier terme est u_1, on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$
- Plus généralement si n et k sont deux entiers naturels avec $k \leq n$, on a : $u_n = u_k + (n-k)r$
- $S_n = u_0 + u_1 .... + u_n = (n+1)\dfrac{(u_0 + u_n)}{2}$

  Plus généralement :$S = nombre \;\; de \;\; termes \times \dfrac{(premier \;\; terme + dernier \;\; terme)}{2}$

1.2 Suites géométriques

Une suite est géométrique si on multiplie chaque terme de la suite toujours par le même nombre réel pour obtenir le terme suivant.

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q

- $u_{n+1} = u_n \times q$ (définition par récurrence)
- $u_n = u_0 \times q^n$ (forme explicite)
- si le premier terme est u_1, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
- Plus généralement si n et k sont deux entiers naturels avec $k \leq n$, on a : $u_n = u_k \times q^{n-k}$
- $S_n = u_0 + u_1 .... + u_n = u_0 \dfrac{(1 - q^{n+1})}{1-q}$

  Plus généralement :$S = premier \;\; terme \times \dfrac{(1 - raison^{nombre \;\; de \;\; termes})}{1 - raison}$
- Limite :

  Si $q \in]-1;1[$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

  Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Si $q > 1$ et $u_0 < 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

2 Suites de la forme $u_{n+1} = au_n + b$

2.1 Méthode

Soit le suite (u_n) définie par $u_{n+1} = au_n + b$ et u_0 (avec a et b réels)

- On pose $v_n = u_n + \alpha$
- α est tel que la suite (v_n) est géométrique, on a donc :
  $v_{n+1} = qv_n$
- Pour le prouver on écrit :
  $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha$
  $= au_n + b + \alpha$ puis on factorise par a de façon à obtenir $v_{n+1} = a(u_n + \alpha) = av_n$
  et donc (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 + \alpha$ et de raison a
- Forme explicite de u_n
  $v_n = v_0 \times a^n$ donc $u_n = v_n - \alpha = v_0 \times a^n - \alpha$

2.2 Exemple 1 :Suite (v_n) donnée (α donné)

☛ On donne la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $u_0 = 6$ et la suite (v_n) par $v_n = u_n - 3$
Montrer que (v_n) est géométrique et déterminer la forme explicite de u_n

☛ **Solution**:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= 2u_n - 3 - 3 \\ &= 2u_n - 6 \\ &= 2(u_n - 3) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

donc (v_n) est géométrique de raison $q = 2$ et premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 6 - 3 = 3$
On a alors $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 2^n$
et donc $u_n = v_n + 3 = 3 \times 2^n + 3$ (forme explicite de u_n)

2.3 Exemple 2 :Suite (v_n) à déterminer (α à trouver)

☛ On donne la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+1} = -3u_n + 4$ et $u_0 = 4$
Déterminer le réel α tel que $v_n = u_n + \alpha$ tel que (v_n) soit géométrique.
En déduire la forme explicite de u_n

☛ **Solution**:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \alpha \\ &= -3u_n + 4 + \alpha \\ &= -3\left(u_n + \frac{4+\alpha}{-3}\right) \end{aligned}$$

Or (v_n) géométrique de raison q donc $v_{n+1} = qv_n = q(u_n + \alpha)$
donc $q = -3$ et $\dfrac{4+\alpha}{-3} = \alpha$ (parties en rouge)
donc $4 + \alpha = -3\alpha \Leftrightarrow \alpha = -1$
(v_n) est une suite géométrique de raison $q = -3$ telle que $v_n = u_n - 1$ et premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 4 - 1 = 3$
donc $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times (-3)^n$ et $u_n = v_n + 1 = 3 \times (-3)^n + 1$ (forme explicite de u_n)

3 Etude des variations

3.1 Méthodes

- Calculer $u_{n+1} - u_n$ puis étudier son signe.
  Si $u_{n+1} - u_n > 0$ on a $u_{n+1} > u_n$ soit (u_n) est croissante.
- Si $u_n > 0$ on peut aussi calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et comparer par rapport à 1
  Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ alors $u_{n+1} > u_n$ soit (u_n) croissante.
- Si (u_n) est définie par une relation (explicite) de la forme $u_n = f(n)$ avec f définie sur $[0; +\infty[$, on peut étudier les variations de f fonction associée à la suite (u_n)
- Cas des suites géométriques :(u_n) géométrique de premier terme u_0 et raison q
  On a alors $u_n = u_0 \times q^n$
  et $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times u_n = u_0 \times q^n(q-1)$ dont le signe dépend du signe de u_0, de q et de $q-1$
  - Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, (u_n) est croissante.
  - Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, (u_n) est décroissante.
  - Si $u_0 > 0$ et $1 > q > 0$, (u_n) est décroissante.
  - Si $u_0 < 0$ et $1 > q > 0$, (u_n) est croissante.
  - Si $q < 0$ alors (u_n) est alternée.
  - Si $-1 < q < 1$ la suite converge vers 0.

3.2 Exemples

1. Soit (u_n) définie par $u_n = n^2 + 3n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Etudier les variations de (u_n).

☛ **Solution**:

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - (n^2 + 3n + 1) = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - n^2 - 3n - 1 = 2n + 3$
or $n \in \mathbb{N}$ donc $2n + 3 > 0$ et $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. Soit (u_n) géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 4$.
Etudier les variations de (u_n).

☛ **Solution**:

(u_n) géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = 4$
donc $u_n = u_0 \times q^n = 4 \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{4}{2^n}$
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{4}{2^{n+1}} - \dfrac{4}{2^n} = \dfrac{4}{2^n}\left(\dfrac{1}{2} - 1\right) = \dfrac{4}{2^n} \times \dfrac{-1}{2} = \dfrac{-2}{2^n}$
donc $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

4 Complément : Suites définies par une récurrence double $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

4.1 Méthode

- Déterminer d'abord les suites géométriques de premier terme 1 et de raison q vérifiant la relation de récurrence.
- Pour déterminer q on a :$v_{n+1} = qv_n$ et $v_{n+2} = qv_{n+1} = q^2 v_n$

- On remplace dans la relation de récurrence :
  $v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n \Leftrightarrow q^2v_n = aqv_n + bv_n \Leftrightarrow v_n(q^2 - aq - b) = 0$
  Il faut donc déterminer les racines de $q^2 - aq - b$
- S'il y a deux racines donc deux suites géométriques (v_n) et (w_n) vérifiant la relation de récurrence alors les suites (u_n) vérifiant cette relation sont de la forme (à admettre) :$u_n = \alpha v_n + \beta w_n$ (combinaison linéaire des deux suites géométriques vérifiant la relation de récurrence)
  α et β étant déterminer par la donnée des termes initiaux de la suite (u_n), u_0 et u_1

4.2 Exemple

☛ On donne la suite (u_n) définie par la relation $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 8u_n$(relation R) et $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$
Déterminer les suites géométriques (v_n) et (w_n) vérifiant la relation R
En déduire la forme explicite de u_n

☛ **Solution**:

(v_n) géométrique de raison q vérifiant la relation R, on a donc : $v_{n+2} = q^2v_n$ et $v_{n+1} = qv_n$

(v_n) vérifie la relation R
$\Leftrightarrow v_{n+2} = -2v_{n+1} + 8v_n$
$\Leftrightarrow q^2v_n = -2qv_n + 8v_n$
$\Leftrightarrow v_n(q^2 + 2q - 8) = 0$
$q^2 + 3q - 4$ admet deux racines $q_1 = 2$ et $q_2 = -4$
Il y a donc deux suites géométriques vérifiant la relation R : $v_n = 2^n$ et $w_n = (-4)^n$
Les suites (u_n) vérifiant la relation R sont donc de la forme :
$u_n = \alpha v_n + \beta w_n = \alpha 2^n + \beta(-4)^n$

α et β sont déterminés par la donnée de $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$
$u_0 = 4 = \alpha + \beta$ et $u_1 = 3 = \alpha \times 2^1 + \beta \times (-4)^1 = 2\alpha - 4\beta$
Il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ 2\alpha - 4\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 - \beta \\ 2(4 - \beta) - 4\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{19}{6} \\ \beta = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

donc l'unique suite (u_n) vérifiant la relation R et telle que $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$ est :
$u_n = \dfrac{19}{6} \times 2^n + \dfrac{5}{6} \times (-4)^n$