

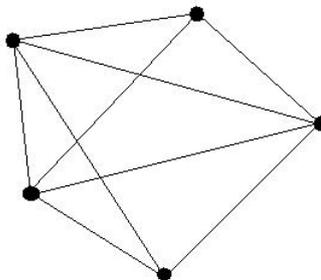
Exercice 1

(7 points)

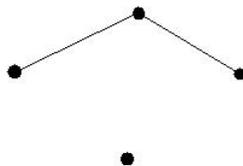
1. Dessiner un graphe G complet d'ordre 5.

Solution:

Il faut donc dessiner un graphe avec 5 sommets, chaque sommet étant adjacent aux quatre autres sommets donc chaque sommet est de degré 4.



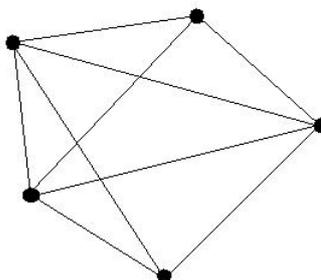
2. Dessiner un graphe non connexe d'ordre 4.

Solution:

3. Dessiner un graphe connexe d'ordre 6 admettant un sous graphe complet d'ordre 4.

Solution:

Le sous graphe complet d'ordre 4 est dessiné en rouge.



4. Quel est le nombre d'arêtes d'un graphe complet d'ordre 40 ?

Solution:

Le graphe contient 40 sommets, chaque sommet est adjacent aux 39 autres sommets donc chaque sommet est de degré 39.

La somme des degrés est donc $40 \times 39 = 1560$

Il y a donc $1560 \div 2 = 780$ arêtes.

5. La matrice d'un graphe est donnée par :
- $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

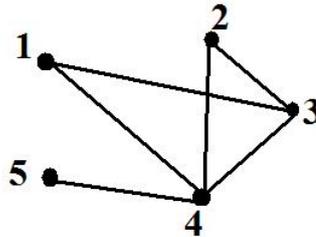
Quel est l'ordre de ce graphe ?

☛ **Solution:**

Il y a 5 lignes et 5 colonnes donc le graphe est d'ordre 5.

Représenter ce graphe.

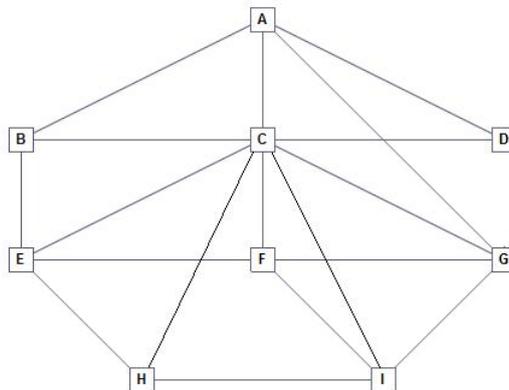
☛ **Solution:**



Exercice 2

(7 points)

On donne le graphe G ci-dessous.



1. Les sommets I et D sont-ils adjacents ?

☛ **Solution:**

Les sommets I et D ne sont pas reliés par une arête donc ils ne sont pas adjacents.

Les sommets A et G sont-ils adjacents ?

☛ **Solution:**

Les sommets A et G sont reliés par une arête donc ils sont adjacents.

2. Quel est l'ordre du graphe G ?

☛ **Solution:**

Il y a 9 sommets donc ce graphe est d'ordre 9.

3. Le graphe G est-il connexe ?

☛ **Solution:**

La chaîne A-D-C-B-E-F-G-I-H passe par tous les sommets du graphe donc il est connexe. (Pour tout couple de sommets du graphe, il existe toujours une chaîne reliant ces deux sommets)

4. Donner le degré de chacun des sommets du graphe.

☛ **Solution:**

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I
degré	4	3	8	2	4	4	4	3	4

5. Calculer la somme des degrés du graphe G et en déduire le nombre d'arêtes en rappelant la relation liant ces deux nombres.

☛ **Solution:**

La somme des degrés est 36 donc il y a $36 \div 2 = 18$ arêtes.

6. Citer une chaîne de longueur 4 sur le graphe G dont les sommets sont tous distincts.

☛ **Solution:**

La chaîne A-B-C-G-I est de longueur 4 (composée de 4 arêtes)

7. Citer un sous graphe complet d'ordre 4 du graphe G.

☛ **Solution:**

Le sous graphe de G constitué des sommets CGIF est un sous graphe complet d'ordre 4 (4 sommets).

8. G admet-il une chaîne eulérienne ? un cycle eulérien ?

☛ **Solution:**

Il existe une chaîne passant par tous les sommets (B-A-D-C-G-F-E-H-I par exemple) donc le graphe est connexe.

Les seuls sommets de degré impairs sont les sommets B et H donc ce graphe admet une chaîne eulérienne.

Exercice 3

(7 points)

1. Est-il possible de tracer la figure ci-dessous sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait ? (justifier avec précision la réponse)

Si oui, par quel(s) point(s) doit-on commencer et terminer le tracé ? (justifier la réponse)

☛ **Solution:**

Tracer la figure ci-dessous sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait revient à chercher un cycle ou une chaîne eulérienne sur ce graphe.

Ce graphe est connexe et n'admet que deux sommets de degré impairs donc il admet existe une chaîne eulérienne dont les sommets de départ et d'arrivée sont les sommets de degrés impairs soit les sommets 1 et 5

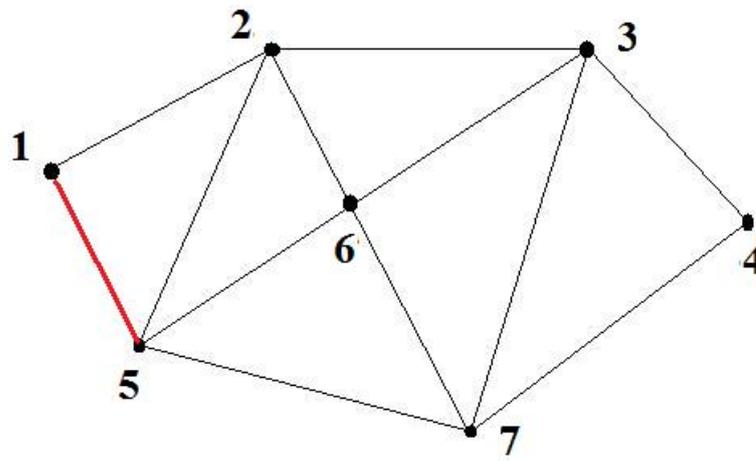
2. Peut-on, en rajoutant un seul segment, effectuer le tracé sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait en partant de n'importe quel point de la figure ?

☛ **Solution:**

Pour pouvoir effectuer le tracé sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait en partant de n'importe quel point de la figure, il faut que ce graphe admette un cycle eulérien.

Il faut donc que le graphe soit connexe et que tous les sommets soient de degré pair.

Il faut donc que les sommets 1 et 5 soient adjacents.



3. Donner un encadrement du nombre chromatique du graphe ci-dessous (justifier soigneusement la réponse).

• **Solution:**

Le sous graphe complet d'ordre maximal est le sous graphe composé des sommets 2, 5 et 6 par exemple et est d'ordre 3.

Le sommet de plus haut degré est par exemple le sommet 6 de degré 4 (les sommets 2, 3 et 7 sont aussi de degré 4)

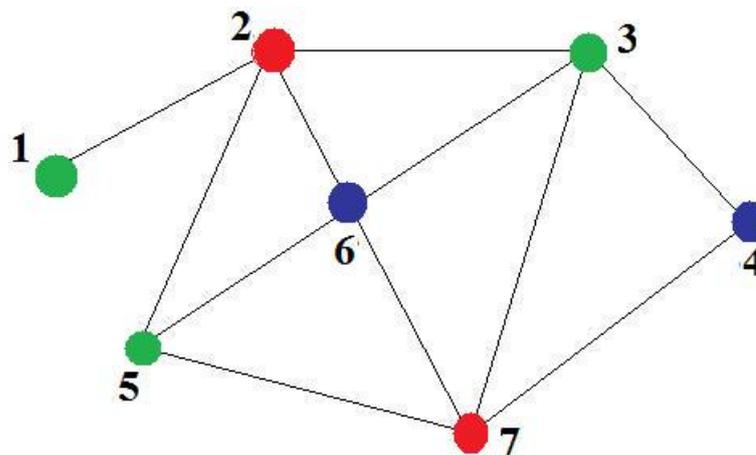
donc le nombre chromatique $\gamma(G)$ est compris entre 3 et $4 + 1$ soit $3 \leq \gamma(G) \leq 5$.

4. En proposant une coloration du graphe ci-dessous et en expliquant la démarche suivie en une ou deux phrases, donner la valeur du nombre chromatique.

• **Solution:**

Pour déterminer le nombre chromatique, il faut trouver une coloration du graphe en utilisant le minimum de couleurs.

On peut affecter trois couleurs différentes au sommets du sous graphe complet 2-5-6 puis il faut réutiliser les mêmes couleurs pour les autres sommets sachant que deux sommets adjacents doivent être de couleurs différentes.



5. Quelle arête faudrait-il ajouter pour que le nombre chromatique soit égal à 4? (justifier la réponse).

• **Solution:**

Il faudrait que le sous-graphe complet d'ordre maximal soit d'ordre 4 en ajoutant par exemple une arête entre les sommets 4 et 6.

On a alors la coloration du graphe ci-dessous en commençant par le sous graphe complet composé des sommets 3, 4, 6 et 7. (voir figure ci-dessous)

