Etude complète d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie sur $D_f =]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-2}$

1. Etudier les variations de f
2. Etudier les limites aux bornes de D_f
3. Montrer que la courbe représentative C_f de f admet une asymptote d d'équation $y = x$ en $+\infty$ puis étudier la position relative deC_f et de d
4. Dresser le tableau de variations de f puis tracer C_f

Correction

1. On pose $u(x) = x^2 - 2x + 1$ et $v(x) = x - 2$
   et on a :$u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = 1$

   $$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2-2x+1)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

   Sur D_f, $(x-2)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe du numérateur $x^2 - 4x + 3$

   Racines de $x^2 - 4x + 3$:
   $\Delta = 4$ il y a donc deux racines $x_1 = 1(x_1 \notin D_f)$ et $x_2 = 3$
   $x^2 - 4x + 3$ est du signe de $a = 1$ (coefficient de x^2) à « l'extérieur »des racines
   donc $f'(x) > 0$ sur $]3;+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]3;+\infty[$
2. $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2 - 2x + 1 = 2^2 - 2\times 2 + 1 = 1$
   $\lim\limits_{x\to 2^+} x - 2 = 0^+$
   donc par quotient $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$
   La courbe C_f admet la droite d'équation $x = 2$ pour asymptote.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
   (règle des termes de plus haut degré quand $x \to \pm\infty$)
3. $f(x) - (x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-2} - x = \dfrac{x^2-2x+1-(x)(x-2)}{x} = \dfrac{1}{x-2}$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
   donc la droite d d'équation $y = x$ est asymptote à C_f en $+\infty$

   Position de C_f par rapport à d :
   Il faut étudier le signe de $f(x) - y$:
   $f(x) - (x)$ est du signe de $x - 2$ or $x - 2 > 0$ pour $x > 2$
   donc C_f est au-dessus de d pour $x \in]2;+\infty[$
4. .

x	2		3		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$ signe de a=1	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Pour effectuer le tracé, il faut placer d'abord les asymptotes, le(s) minimum(s) (et maximum(s)) ainsi que leurs tanngentes parallèles à l'axe des abscisses puis placer suffisamment de points pour tracer précisemment C_f (avec la fonction table de la calculatrice)